

Lösungen 5

1. Es sei \mathbb{K} ein Körper und $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V ?

(a)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

(b)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

(c)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(d)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

Geben Sie für jeden Unterraum ein Erzeugendensystem an, d.h. finden Sie Vektoren w_1, w_2, \dots, w_n , sodass die Hülle

$$\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$$

der entsprechende Unterraum ist.

Solution:

- (a) Die Matrix $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist der Nullvektor in $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$. Aber $\mathbf{0} \notin W$. Also ist W kein Unterraum.

Tatsächlich ist hier W die Teilmenge aller *invertierbaren* Matrizen!

- (b) Sicherlich gilt $\mathbf{0} \in W$. Seien $a, b, c, e, f, g, \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda e & b - \lambda f \\ c - \lambda g & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Unterraum. Ein Erzeugendensystem bilden zum Beispiel die drei Matrizen $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$W = \langle e_{11}, e_{12}, e_{21} \rangle.$$

(c) Sicherlich gilt wieder $\mathbf{0} \in W$. Seien $a, b, c, e, f, g, \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda e & b - \lambda f \\ c - \lambda g & a - \lambda e \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Unterraum. Ein mögliches Erzeugendensystem sind die drei Matrizen $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$W = \langle d, e_{12}, e_{21} \rangle.$$

(d) Das ist kein Unterraum, denn $\mathbf{0} \notin W$.

2. Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängig?

- (a) $(1, 0, 0, 1)$, $(2, 3, -3, 9)$, $(1, 3, -4, 7)$, $(2, 0, 1, 3)$ in $M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$;
- (b) $(1, 2, 3, 4)$, $(-3, 4, 2, 8)$, $(-3, 9, 1, 3)$ in $M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$;
- (c) $1+i$, $1-i$, wobei \mathbb{C} als zweidimensionaler *reeller* Vektorraum aufgefasst wird;
- (d) $1+i$, $1-i$, wobei \mathbb{C} als eindimensionaler *komplexer* Vektorraum aufgefasst wird;
- (e) $\sin(x)$, $\sin(x+1)$, $\sin(x+2)$, im Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ;
- (f) $\sin(0x)$, $\sin(1x)$, $\sin(2x)$, im Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ;
- (g) $\{\varphi_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, wobei $\varphi_n(x) := 1/(x+n)$, $x \neq \{0, -1, -2, \dots\}$.

Hinweis: Für (g) kann es hilfreich sein zu bemerken, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

Solution:

(a) Es gilt

$$(1, 0, 0, 1) + (2, 3, -3, 9) = (1, 3, -4, 7) + (2, 0, 1, 3),$$

also sind die Vektoren linear abhängig.

(b) Aus

$$a \cdot (1, 2, 3, 4) + b \cdot (-3, 4, 2, 8) + c \cdot (-3, 9, 1, 3) = 0$$

folgt in der ersten Koordinate $a = 3(b+c)$. Eingesetzt in die drei weiteren Koordinaten ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10b + 15c &= 0, \\ 11b + 10c &= 0, \\ 20b + 15c &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtrahieren der ersten Zeile von der dritten ergibt sich $10b = 0$ und somit $b = 0$, womit sofort $c = 0$ und dann $a = 0$ folgt. Also sind die 3 Vektoren linear unabhängig.

- (c) Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 , indem wir eine komplexe Zahl $x + iy$ mit dem Vektor (x, y) identifizieren. Die beiden komplexen Zahlen aus der Aufgabe entsprechen also den Vektoren $(1, 1)$ und $(1, -1)$ aus \mathbb{R}^2 , welche offensichtlich linear unabhängig sind.
- (d) Über \mathbb{C} sind die beiden komplexen Zahlen linear abhängig, denn es gilt

$$(1 + i) - i(1 - i) = 0.$$

- (e) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(x + 2) &= \sin(x) \cos(2) + \cos(x) \sin(2), \\ \sin(x + 1) &= \sin(x) \cos(1) + \cos(x) \sin(1).\end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Zeile nach $\cos(x)$ und einsetzen in der ersten ergibt nacheinander

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\sin(x + 1) - \sin(x) \cos(1)}{\sin(1)}, \\ \Rightarrow \sin(x + 2) &= \sin(x) \cos(2) + \sin(2) \cdot \frac{\sin(x + 1) - \sin(x) \cos(1)}{\sin(1)} \\ &= \sin(x) \cdot \left(\cos(2) - \frac{\cos(1) \sin(2)}{\sin(1)} \right) + \sin(x + 1) \cdot \frac{\sin(2)}{\sin(1)} \\ &= -\sin(x) + \sin(x + 1) \cdot \frac{\sin(2)}{\sin(1)}.\end{aligned}$$

Somit sind die 3 Vektoren linear abhängig.

- (f) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da $\sin(0x) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge von Vektoren, welche 0 enthält ist automatisch linear abhängig.
- (g) Wir verwenden vollständige Induktion über n und wollen beweisen, dass die Vektoren φ_n linear unabhängig sind.

Die Aussage ist klar für $n = 0$, da $\frac{\lambda}{x}$ nur für $\lambda = 0$ die Nullfunktion ist.

Sei die Aussage nun wahr für $n = k$. Betrachte die Linearkombination $a_0\varphi_0 + \dots + a_{k+1}\varphi_{k+1}$: Falls $a_{k+1} = 0$, so ist die Aussage nach Induktionsvoraussetzung wahr. Sonst schreiben wir die Summe als

$$\frac{\sum_{0 \leq i \leq k} \left(a_i \cdot \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} (x + j) \right)}{\prod_{0 \leq i \leq k} (x + i)} + \frac{a_{k+1}}{(k + 1) + x} = 0.$$

Umformen ergibt

$$(x + (k + 1)) \left(\sum_{0 \leq i \leq k} a_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} (x + j) \right) = -a_{k+1} \prod_{0 \leq i \leq k} (x + i).$$

Dies sind zwei Polynome in x . Auf der linken Seite ist $(x + (k + 1))$ ein Teiler, also muss es auch das Polynom auf der rechten Seite teilen (als Polynom!). Dies ist aber nur möglich, falls $a_{k+1} = 0$ gilt.

3. Im \mathbb{R}^5 seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wählen Sie aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ bzw. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ bilden.

Solution: Man sieht direkt, dass $v_2 = -v_3$ ist. Durch Umwandlung der Matrix mit den Spalten v_1, v_3, v_4 in reduzierte Zeilenstufenform erhält man eine invertierbare 5×5 Matrix W (vergleiche mit der Aufgabe 3 der Übungen 3), sodass

$$W \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Da die Spalten der Matrix auf der rechten Seite linear unabhängig sind und W invertierbar ist, folgt mit Aufgabe 6 in diesen Übungen für die Matrix W^{-1} , dass die Vektoren v_1, v_3, v_4 linear unabhängig sind und eine Basis von $\langle v_1, \dots, v_4 \rangle$ bilden. Alternativ bilden auch die Vektoren v_1, v_2, v_4 eine Basis.

Analog erhält man durch Umwandlung der Matrix $A = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ in reduzierte Zeilenstufenform eine Matrix W , sodass $W \cdot A = B$ wobei

$$W := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & -8 & 4 & 1 \\ \frac{17}{6} & \frac{1}{4} & \frac{-55}{12} & \frac{31}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-11}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 10 & 1 & -18 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gelten. Da die Spalten von B linear unabhängig sind und die Matrix W invertierbar ist, folgt wieder mit Aufgabe 6 in diesen Übungen für die Matrix W^{-1} auch die Vektoren w_1, \dots, w_4 linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von $\langle w_1, \dots, w_4 \rangle$.

4. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder \mathbb{F}_2 und sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset K^5.$$

Finden Sie ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von $\langle S \rangle$, also ein Erzeugendensystem S' von $\langle S \rangle$, sodass keine echte Teilmenge von S' ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ ist.

Solution: Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sei

$$A := (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5)$$

die (5×5) -Matrix mit den Spaltenvektoren v_1, \dots, v_5 .

Wir beginnen mit der Umwandlung von A in reduzierte Zeilenstufenform aber achten darauf, dass wir nur Operationen verwenden, die sowohl in \mathbb{Q} als auch in \mathbb{F}_2 erlaubt sind, also insbesondere teilen wir nicht durch 2. Sei W die invertierbare Matrix, die durch Linksmultiplikation unserer durchgeführten elementaren Zeilenoperationen entsteht. Wir erhalten die (noch nicht ganz reduzierte) Zeilenstufenform

$$WA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 die Spaltenvektoren von WA . Für alle $1 \leq i \leq 5$ gilt $w_i = Wv_i$ und daher auch $W^{-1}w_i = v_i$. Wir sehen, dass $w_4 = w_1 - w_2$ ist. Durch Multiplikation mit W^{-1} gilt daher auch $v_4 = v_1 - v_2$. Somit ist $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ bereits ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$. Für $K = \mathbb{Q}$ sind w_1, w_2, w_3, w_5 linear unabhängig und mit Aufgabe 6 für die Matrix W^{-1} folgt, dass auch v_1, v_2, v_3, v_5 linear unabhängig sind. Daher ist $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{Q}$. Für $K = \mathbb{F}_2$ haben wir die zusätzliche Gleichung $w_5 = w_1 + w_2 - w_3$ (denn $-2 = 0$ in \mathbb{F}_2), aber die Vektoren w_1, w_2, w_3 sind immer noch linear unabhängig. Aus den gleichen Gründen wie vorher ist also $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{F}_2$.

5. Seien $A_1, A_2 \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

(b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

Beweisen Sie, dass $\langle A_1, A_2 \rangle = M$.

(c) Finden Sie $A_3 \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist.

Ist $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?

Solution:

(a) Angenommen A_1, A_2 sind linear abhängig. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei nicht beide gleich 0 sind, so dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also folgt aus dem komponentenweisen Vergleich der Einträge, dass $\alpha = \beta = 0$ und somit sind A_1, A_2 linear unabhängig.

- (b) Aus der Rechnung im ersten Teil folgt, dass $\langle A_1, A_2 \rangle \subset M$. Wir müssen also nur zeigen, dass $M \subset \langle A_1, A_2 \rangle$, d.h. dass jede Matrix $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ der Form $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ mit $b - a = f$ und $3a = c$ in $\langle A_1, A_2 \rangle$ enthalten ist. Wir zeigen $B = aA_1 + (f - a)A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a + f & 3a \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f - a & 0 \\ 0 & 0 & f - a \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + (f - a)A_2 \end{aligned}$$

- (c) Sei $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Angenommen $\{A_1, A_2, A_3\}$ wäre linear abhängig. Dann gäbe es α, β, γ nicht alle drei gleich 0 sind, so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ \gamma & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

und folglich $\alpha, \beta, \gamma = 0$. Das ist ein Widerspruch, und daher ist $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig. Sei $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, dann zeigt obige Rechnung, dass $e = 0$. Also ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \setminus \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ und somit kann $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ nicht gleich der linearen Hülle von $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ sein. Das könnte man auch leicht mittels Vergleich der Dimensionen von $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ und $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ begründen!

6. Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eine lineare Hülle in \mathbb{R}^3 . Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dieser linearen Hülle enthalten sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution: Zuallererst beobachten wir, dass der Vektorraum \mathbb{R}^3 nur Dimension 3 hat. Dementsprechend kann es nur maximal 3 linear unabhängige Vektoren in der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$$

geben. Geschicktes ausprobieren bringt uns auf die beiden Gleichungen

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix},$$

das heisst sowohl der vierte, als auch der dritte Vektor in der Menge sind linear abhängig von den beiden ersten Vektoren. Dementsprechend gilt

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nach dieser Vorarbeit, können wir uns der tatsächlichen Aufgabe zuwenden.

(a) Damit v_1 in U enthalten ist, muss es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix}.$$

Da der zweite Eintrag im Vektor v_1 gleich 0 ist, folgt $\alpha = 0$. Daher müsste $\beta = \frac{1}{5}$ erfüllen (erster Eintrag von v_1), aber auch $\beta = 0$ (letzte Eintrag von v_1). Das geht natürlich nicht. Also ist v_1 nicht in U enthalten.

(b) Für v_2 gilt, dass

$$v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix},$$

nur erfüllt sein kann, falls $\alpha = 2$ ist (zweiter Eintrag von v_2). Für $\beta = -1$ sind stimmen dann auch der erste und dritte Eintrag mit v_2 überein. Daher gilt $v_2 \in U$.

(c)

(d) Für v_3 gilt, dass

$$v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix},$$

nur erfüllt sein kann, falls $\alpha = -1$ ist (zweiter Eintrag von v_3). Daher müsste $\beta = \frac{1}{3}$ erfüllen (erster Eintrag von v_3), aber auch $\beta = \frac{9}{5}$ (letzte Eintrag von v_3). Das geht wieder nicht. Also ist v_3 nicht in U enthalten.

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass Vektoren $v_1, \dots, v_m \in K^n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn Av_1, \dots, Av_m linear unabhängig sind.

Solution: Sind v_1, \dots, v_m linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$$

mit $a_1, \dots, a_m \in K$. Multiplikation mit A liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^m a_i Av_i = A \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i v_i \right) = A \cdot 0 = 0.$$

Also sind auch Av_1, \dots, Av_m linear abhängig.

Sind umgekehrt Av_1, \dots, Av_m linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^m a_i Av_i = 0$$

mit $a_1, \dots, a_m \in K$. Multiplikation mit A^{-1} liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = A^{-1} \cdot A \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i v_i \right) = A^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i Av_i \right) = A^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Also sind auch v_1, \dots, v_m linear abhängig.

8. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solution: Die Vektoren v_1, \dots, v_4 sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + \dots + x_4 v_4$ nur die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_4 = 0$ hat. Durch Umformung in reduzierte Zeilenstufenform oder direktes Ausprobieren erhält man zum Beispiel die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.