Serie 6

1. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} U &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}, \\ D &:= \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{K}^n \mid \alpha \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Unterräume U, D, $U \cap D$ und $U + D$.

2. Bestimmen Sie den Zeilen- bzw. Spaltenrang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 + 3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

   in Abhängigkeit des Parameters a.

3. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Funktionen

$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$$

   bzw. der ungeraden Funktionen

$$V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

   ein Untervektorraum von V ist.
   Zeige ausserdem $V = V_1 \oplus V_2$, d.h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$.
   Hinweis: Betrachten Sie für $f \in V$ die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei W ein Unterraum. Es sei die folgende Relation $R \subset V \times V$ definiert:

$$v_1 R v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation definiert.

   (b) Gegeben $v \in V$, sei $[v] \in V/\sim$ die Äquivalenzklasse von v. Definieren Sie auf $V/\sim$ eine Addition

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{für } [v_1], [v_2] \in V/\sim$$

sowie eine skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v] \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } [v] \in V/\!\sim$$

Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und dass $V/\!\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.
Bemerkung: Der Vektorraum $V/\!\sim$ wird auch Quotientenraum oder Faktorraum von V nach W genannt. Üblicherweise notieren wir diesen mit V/W.

5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität
   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$
   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$
   (h) $f : \mathbb{R}^2 \to V,\ (x, y) \mapsto f_{x,y}$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $f_{x,y} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

6. Betrachten Sie den Unterraum

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie die Basis zweier verschiedener Komplemente W_1 und W_2 von V in $\mathbb{R}^4$.

7. Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Matrix A gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$