Lösungen 6

1. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} U &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}, \\ D &:= \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{K}^n \mid \alpha \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Unterräume U, D, $U \cap D$ und $U + D$.

Solution: Für $n = 0$ ist $U = D = U \cap D = U + D = 0$. Jeder dieser Unterräume hat also die Basis $\varnothing$ und folglich die Dimension 0.

Sei nun $n \geqslant 1$. Jedes Element $(\alpha, \ldots, \alpha) \in D$ ist ein Vielfaches des Vektors $v := (1, \ldots, 1)$. Wegen $v \neq 0$ ist $\{v\}$ ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis von D. Insbesondere ist $\dim(D) = 1$.

Sodann liegen die $n - 1$ Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad v_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

in U und sind linear unabhängig. Insbesondere ist also $\dim(U) \geqslant n - 1$. Wegen $(1, 0, \ldots, 0) \notin U$ ist aber $\dim(U) < \dim(\mathbb{K}^n) = n$ und wir schliessen $\dim(U) = n - 1$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von U ist, bilden sie eine Basis von U.

Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist in $\mathbb{K}$, gilt $v = (1, \ldots, 1) \notin U$. In diesem Fall gilt $U \cap D = 0$, also ist $\varnothing$ eine Basis von $U \cap D$ und $\dim(U \cap D) = 0$. Wegen $U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ folgt ausserdem, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. Das zeigt $\dim(U + D) \geqslant n$. Da aber $\dim(U + V) \leqslant \dim(\mathbb{K}^n) = n$ ist, schliessen wir, dass $U + D$ Dimension n hat und die Vektoren $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $U + D$ bilden.

Wenn $n \cdot 1 = 0$ ist in $\mathbb{K}$, gilt $v = (1, \ldots, 1) \in U$, also auch $D \subset U$. In diesem Fall ist also $U \cap D = D$ und $U + D = U$. Für beide Unterräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt.

2. Bestimmen Sie den Zeilen- bzw. Spaltenrang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 + 3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit des Parameters a.

Solution: Zunächst bringen wir A in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a+1 \\ 0 & 1 & a+6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a \\ 0 & 0 & a+1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a(a+3) \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \begin{cases} 3 & , \quad \text{falls } a = 0,\ a = -3 \text{ oder } a = -1 \\ 4 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist a nämlich einer der drei Werte $0, -3$ oder 1, so können die vier Zeilen, beziehungsweise Spalten der Matrix in Zeilenstufenform unmöglich linear unabhängig sein.
Falls $a = -1$ ist, so ist dritte Spalte eine Linearkombination der ersten beiden Spalten, jedoch sind die restlichen Spalten linear unabhängig.
Falls $a = 0$ oder $a = -3$ gilt, so ist der letzte Eintrag der vierten Spalte 0. Somit sind alle Spalten im drei-dimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ aller Vektoren, deren letzter Eintrag 0 ist enthalten. Da die ersten drei Spalten ausserdem linear unabhängig voneinander sind, spannen diese den gesamten Untervektorraum $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ auf.

3. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Funktionen

$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$$

bzw. der ungeraden Funktionen

$$V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

ein Untervektorraum von V ist.
Zeige ausserdem $V = V_1 \oplus V_2$, d.h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$.
Hinweis: Betrachten Sie für $f \in V$ die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Solution: Die Nullfunktion ist sowohl in V_1 als auch in V_2 enthalten; also sind V_1 und V_2 nicht leer.

Für alle geraden Funktionen $f, g \in V_1$ und für alle λ gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass $f+g$ und λf wieder gerade Funktionen sind, also in V_1 liegen. Folglich ist V_1 ein Untervektorraum. Der Fall V_2 folgt analog.

Um $V = V_1 \oplus V_2$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass jedes Element aus V als Summe eines Elementes aus V_1 und eines Elementes aus V_2 geschrieben werden kann, und dass $V_1 \cap V_2 = 0$ ist.

Für ein beliebiges Element $f \in V$ definiere Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad f_2(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Wegen

$$f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x) \quad \text{und} \quad f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f_1 \in V_1$ und $f_2 \in V_2$, und wegen

$$(f_1+f_2)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f = f_1 + f_2$. Dies zeigt, dass jedes Element aus V als Summe eines Elementes aus V_1 und eines Elementes aus V_2 geschrieben werden kann.

Sei schliesslich $f \in V_1 \cap V_2$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Daraus folgt $f(x) + f(x) = 2f(x) = 0$, und da 2 in $\mathbb{R}$ invertierbar ist, schon $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $f = 0$.

4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei W ein Unterraum. Es sei die folgende Relation $R \subset V \times V$ definiert:

$$v_1 R v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation definiert.

   (b) Gegeben $v \in V$, sei $[v] \in V/\sim$ die Äquivalenzklasse von v. Definieren Sie auf $V/\sim$ eine Addition

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{für } [v_1], [v_2] \in V/\sim$$

   sowie eine skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v] \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } [v] \in V/\sim$$

   Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und dass $V/\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.
   Bemerkung: Der Vektorraum $V/\sim$ wird auch Quotientenraum oder Faktorraum von V nach W genannt. Üblicherweise notieren wir diesen mit V/W.

Solution:

(a) Da W ein Vektorraum ist, gilt $w - w = 0 \in W$ für alle $w \in W$, also ist R reflexiv.

Falls $v_1 - v_2 \in W$, dann ist auch $-(v_1 - v_2) = v_2 - v_1 \in W$ und R ist symmetrisch. Da W unter Addition abgeschlossen ist, gilt für $v_1 - v_2 \in W$ und $v_2 - v_3 \in W$ auch

$$v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W$$

Also ist R transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

(b) Angenommen $v_1 \sim v_2$ und $v_1' \sim v_2'$, dann existieren $w, w' \in W$ so dass $v_1 = v_2 + w$ und $v_1' = v_2' + w'$. Also ist

$$(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1') = w + w' \in W$$

Es folgt also $[v_2 + v_2'] = [v_1 + v_1']$ und somit hängt die Addition nicht von der Wahl der Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\lambda v_2 - \lambda v_1 = \lambda w \in W$$

Es folgt also $[\lambda v_2] = [\lambda v_1]$ und somit hängt die skalare Multiplikation nicht von der Wahl des Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

Die Vektorraumaxiome folgen sofort aus den Vektorraumaxiomen für V. Seien $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann

(VR1) $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$

(VR2) $([u] + [v]) + [w] = [u + v] + [w] = [(u + v) + w] = [u + (v + w)] = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w])$

(VR3) $[0_V] + [v] = [0_V + v] = [v]$

(VR4) $[-v] + [v] = [-v + v] = [0_V]$

(VR5) $\lambda \cdot ([u] + [v]) = \lambda \cdot [u + v] = [\lambda \cdot (u + v)] = [\lambda \cdot u + \lambda \cdot v] = [\lambda \cdot u] + [\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [u] + \lambda \cdot [v]$

(VR6) $(\lambda + \mu) \cdot [v] = [(\lambda + \mu) \cdot v] = [\lambda \cdot v + \mu \cdot v] = [\lambda \cdot v] + [\mu \cdot v] = \lambda \cdot [v] + \mu \cdot [v]$

(VR7) $(\lambda\mu) \cdot [v] = [(\lambda\mu) \cdot v] = [\lambda(\mu \cdot v)] = \lambda[\mu \cdot v] = \lambda(\mu \cdot [v])$

(VR8) $1 \cdot [v] = [1 \cdot v] = [v]$

Also ist $V/\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(h) $f : \mathbb{R}^2 \to V,\ (x, y) \mapsto f_{x,y}$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $f_{x,y} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

Solution:

Die Abbildung im Fall (a) ist die Linksmultiplikation T_A mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sie ist also linear.

Die Abbildungen in den Teilaufgaben (c), (d) und (e) sind Linksmultiplikationen T_A mit den Matrizen A jeweils gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (0) \ \text{ und } (1).$$

Daher sind diese Abbildungen auch linear.

Für die Abbildungen in (b), (f) und (g) kann einfach nachgeprüft werden, dass die Eigenschaften für lineare Abbildungen nicht erfüllt sind. Am schnellsten sieht man dies durch Betrachten des Bildes des Nullvektors. Dieses ist bei den drei Abbildungen immer verschieden von Null, nämlich gleich $(0, 0, 1)$, 1 bzw. $(-1, 1)$. Daher ist zum Beispiel die Eigenschaft

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

nicht erfüllt und somit sind diese drei Abbildungen sicher nicht linear.

Zuletzt zeigen wir die Linearität der Abbildung in (h).
Das Bild von (x, y) unter f ist gegeben durch die Funktion $f_{x,y} = \alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass gilt

$$f_{x,y}(-1) = x \quad \text{und} \quad f_{x,y}(1) = y\,.$$

Die letzten beiden Bedingungen sind äquivalent dazu, dass (α, β) eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha \sin(-1) + \beta \cos(-1) &= x \\ \alpha \sin(1) + \beta \cos(1) &= y \end{aligned}$$

ist. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sin(-1) & \cos(-1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(1) & \cos(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, denn $\cos(1) \neq 0$ und $\sin(1) \neq 0$, somit ist

$$\frac{-1}{2\sin(1)\cos(1)} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\cos(1) \\ -\sin(1) & -\sin(1) \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix. Daher folgt, dass α und β eindeutig bestimmt sind und die Abbildung f wohldefiniert ist.

Seien nun (x, y) und $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $f_{x,y} + f_{x',y'}$ eine Funktion in V, welche wieder eine Linearkombination von sin und cos ist, und für welche

$$\begin{aligned} (f_{x,y} + f_{x',y'})(-1) = f_{x,y}(-1) + f_{x',y'}(-1) = x + x' \\ (f_{x,y} + f_{x',y'})(1) = f_{x,y}(1) + f_{x',y'}(1) = y + y' \end{aligned}$$

gilt. Sie erfüllt also genau die definierenden Eigenschaften von $f_{x+x',y+y'}$, und ist wegen der Eindeutigkeit somit gleich dieser. Eine ähnliches Argument zeigt $\lambda \cdot f_{x,y} = f_{\lambda x, \lambda y}$. Die Abbildung f ist also linear.

6. Betrachten Sie den Unterraum

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie die Basis zweier verschiedener Komplemente W_1 und W_2 von V in $\mathbb{R}^4$.

Solution: Wir beschreiben einen Algorithmus, der ermöglicht ein Kompliment eines Vektorraumes zu finden, ohne bloss ein Komplement zu "erraten".
Das funktioniert folgendermassen:
Wir schreiben zunächst zwei Erzeuger von V in eine Matrix und ergänzen daneben die Identitätsmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wandeln diese Matrix in eine reduzierte Zeilenstufenform um und erhalten die Matrix:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die ersten vier Spaltenvektoren der Matrix A bilden demnach eine Basis des $\mathbb{R}^4$. (*Wieso gilt diese Behauptungs? Warum ändern Zeilentransformationen die lineare (Un-)Abhängigkeit der Spaltenvektoren nicht? Tipp: Siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 6*)
Mit

$$W_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gilt also $V + W_1 = \mathbb{R}^4$. Mit der Dimensionsformel für Unterräume, oder direkt unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit der ersten vier Spaltenvektoren von A, folgern wir $V \cap W_1 = \{0\}$. Also ist W_1 ein Komplement von V in $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis von W_1.

Um ein weiteres Komplement W_2 zu konstruieren, bedienen wir uns eines Tricks. Wir addieren einen beliebigen Vektor $v \neq 0_V$ aus V zu einem der beiden erzeugenden Vektoren von W_1 hinzu. Wir könnten W_2 zum Beispiel als

$$W_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

definieren. Klarerweise gilt dann noch immer $V + W_2 = \mathbb{R}^4$. Auch hier zeigt uns die Dimensionsformel $V \cap W_2 = \{0\}$. Des Weiteren ist $W_1 \neq W_2$, also ist W_2 tatsächlich ein von W_1 verschiedenes Komplement von V.

7. Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Matrix A gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution:

Der Kern besteht aus allen Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, für die gilt: $Ax = 0$. Das bedeutet, wir müssen folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt zwei Gleichungen:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \tag{1}$$
$$4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \tag{2}$$

Wir sehen, dass Gleichung (2) das Doppelte von Gleichung (1) ist. Daher ist eine Gleichung redundant und wir müssen nur betrachten:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

Wir können x_2 ausdrücken:

$$x_2 = 2x_1 + 3x_3$$

Somit haben wir:

$$\begin{aligned} &x_1 \text{ ist frei wählbar} \\ &x_2 = 2x_1 + 3x_3 \\ &x_3 \text{ ist frei wählbar} \end{aligned}$$

Mit zwei freien Variablen können wir den Kern als Linearkombination schreiben. Setzen wir $r = x_1$ und $s = x_3$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3s \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist der Kern:

$$\ker(f) = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Kern ist also ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der durch die zwei linear unabhängigen Vektoren $(1, 2, 0)$ und $(0, 3, 1)$ aufgespannt wird.