

Serie 7

- Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf ihre Eigenschaften (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) und bestimmen Sie, ob es sich um Äquivalenzrelationen handelt. Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, geben Sie auch die Äquivalenzklassen an.
 - Die "gleicher Rest bei Division durch 3"-Relation
Für $a, b \in \mathbb{Z}$ definieren wir: $a \sim b \iff a \equiv b \pmod{3}$.
(Das bedeutet: a und b haben den gleichen Rest bei Division durch 3).
 - Die "gleiche Länge"-Relation
Sei M die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$.
Für $x, y \in M$ definieren wir: $x \sim y \iff x$ und y haben die gleiche Länge.
 - Die "orthogonale"-Relation
Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene
Für $g, h \in M$ definieren wir: $g \sim h \iff g$ und h schneiden sich in genau einem Punkt im rechten Winkel
 - Die "parallel oder identisch"-Relation
Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene
Für $g, h \in M$ definieren wir: $g \sim h \iff g$ und h sind parallel oder identisch
 - Die "gemeinsames Elternteil"-Relation
Zwei Menschen sind in Relation, wenn sie ein gemeinsames Elternteil haben.
 - Die "gleicher Betrag"-Relation
Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir: $x \sim y \iff |x| = |y|$
- Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $T : V \rightarrow V$ und $S : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $S \circ T = \text{id}_V$. Zeigen Sie, dass dann auch $T \circ S = \text{id}_V$ gilt.
- Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch Linksmultiplikation mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} und

$$T \in \text{Hom}(V, W) := \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ ist eine } \mathbb{K}\text{-lineare Abbildung}\}.$$

- Beweisen Sie

- i. Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$T^{-1}(W') := \{v \in V \mid T(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V .

- ii. Es gilt

$$\dim(T^{-1}(W')) = \dim T^{-1}(0) + \dim(\text{im}(T) \cap W').$$

- (b) Beweisen Sie

- i. T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \text{Hom}(W, V)$ so dass $S \circ T = \text{id}_V$.
 ii. T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \text{Hom}(W, V)$ so dass $T \circ S = \text{id}_W$.

- (c) Finden Sie Beispiele für Abbildungen T und S wie in (b.i) und (b.ii), die jedoch nicht invertierbar sind.

5. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, 3x - 6y)$. Finden Sie Basen von \mathbb{R}^2 und von \mathbb{R}^3 , bezüglich welcher die Matrix $A = (a_{ij})$ von f die Form

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

annimmt.

6. Betrachten Sie den Endomorphismus $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix A , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $T_A^2 := T_A \circ T_A \neq 0$, aber $T_A^3 := T_A^2 \circ T_A = 0$.

- (b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von \mathbb{R}^3 mit $T_A(u) = 0$, $T_A(v) = u$, $T_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.

7. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die Standardbasis des \mathbb{R}^2 und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass a eine Basis des \mathbb{R}^4 und c eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.
- (b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von
 - i. f bezüglich der Basen a, b .
 - ii. g bezüglich der Basen b, c .
 - iii. $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c .