Lösungen 7

1. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf ihre Eigenschaften (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) und bestimmen Sie, ob es sich um Äquivalenzrelationen handelt. Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, geben Sie auch die Äquivalenzklassen an.

   (a) *Die "gleicher Rest bei Division durch 3"-Relation*
   Für $a, b \in \mathbb{Z}$ definieren wir: $a \sim b \iff a \equiv b \pmod 3$.
   (Das bedeutet: a und b haben den gleichen Rest bei Division durch 3).

   (b) *Die "gleiche Länge"-Relation*
   Sei M die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$.
   Für $x, y \in M$ definieren wir: $x \sim y \iff x$ und y haben die gleiche Länge.

   (c) *Die "orthogonale"-Relation*
   Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene
   Für $g, h \in M$ definieren wir: $g \sim h \iff g$ und h sind scheiden sich in genau einem Punkt im rechten Winkel

   (d) *Die "parallel oder identisch"-Relation*
   Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene
   Für $g, h \in M$ definieren wir: $g \sim h \iff g$ und h sind parallel oder identisch

   (e) *Die "gemeinsames Elternteil"-Relation*
   Zwei Menschen sind in Relation, wenn sie ein gemeinesames Elternteil haben.

   (f) *Die "gleicher Betrag"-Relation*
   Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir: $x \sim y \iff |x| = |y|$

Solution:

(a) **Die "gleicher Rest bei Division durch 3"-Relation**

   i. Reflexiv: ✓
      - Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \equiv a \pmod 3$

   ii. Symmetrisch: ✓
      - Wenn $a \equiv b \pmod 3$, dann auch $b \equiv a \pmod 3$

   iii. Transitiv: ✓
      - Wenn $a \equiv b \pmod 3$ und $b \equiv c \pmod 3$, dann $a \equiv c \pmod 3$

   → Dies ist eine Äquivalenzrelation. Es gibt 3 Äquivalenzklassen, für die $0, 1, 2$ jeweils Repräsentanten sind.

(b) **Die "gleiche Länge"-Relation**

   i. Reflexiv: ✓

- Jedes Wort hat die gleiche Länge wie es selbst

ii. Symmetrisch: ✓

- Wenn Wort x die gleiche Länge wie y hat, hat auch y die gleiche Länge wie x

iii. Transitiv: ✓

- Wenn $|x| = |y|$ und $|y| = |z|$, dann $|x| = |z|$

→ Dies ist eine Äquivalenzrelation. Es gibt für jede Länge genau eine Äquivalenzklasse.

(c) **Die "orthogonale"-Relation**

i. Reflexiv: X

- Eine Gerade kann nicht zu sich selbst orthogonal sein

ii. Symmetrisch: ✓

- Wenn $g \perp h$, dann auch $h \perp g$

iii. Transitiv: X

- Gegenbeispiel: Zwei Geraden g und h können orthogonal sein, h und k können orthogonal sein, aber g und k müssen nicht orthogonal sein

→ Dies ist keine Äquivalenzrelation.

(d) **Die "parallel oder identisch"-Relation**

i. Reflexiv: ✓

- Jede Gerade ist zu sich selbst identisch

ii. Symmetrisch: ✓

- Wenn g parallel/identisch zu h, dann h parallel/identisch zu g

iii. Transitiv: ✓

- Wenn $g \parallel h$ und $h \parallel k$, dann $g \parallel k$

→ Dies ist eine Äquivalenzrelation. Sei P irgendein Punkt auf der Ebene. Ein Represäntantensystem der Äquivalenzrelation sind alle Geraden, die durch P gehen.

(e) **Die "gemeinsames Elternteil"-Relation**

i. Reflexiv: ✓

- Eine Person hat ein (sogar zwei) gemeinsame Elternteile mit sich selbt.

ii. Symmetrisch: ✓

- Wenn A und B ein gemeinsames Elternteil haben, dann haben B und A auch ein gemeinsames Elternteil

iii. Transitiv: X

- Wenn A und B ein gemeinsames Elternteil haben und B und C ein gemeinsames Elternteil haben, müssen A und C kein gemeinsames Elternteil haben

→ Dies ist keine Äquivalenzrelation

(f) **Die "gleicher Betrag"-Relation**

   i. Reflexiv: ✓
      - Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| = |x|$

   ii. Symmetrisch: ✓
      - Wenn $|x| = |y|$, dann $|y| = |x|$

   iii. Transitiv: ✓
      - Wenn $|x| = |y|$ und $|y| = |z|$, dann $|x| = |z|$

   → Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind der Form $\{x, -x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $T : V \to V$ und $S : V \to V$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $S \circ T = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass dann auch $T \circ S = \mathrm{id}_V$ gilt.

   Solution: Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten:

   Sei $x \in \ker(T)$, d.h. $T(x) = 0$. Dann gilt:

$$x = \mathrm{id}_V(x) = (S \circ T)(x) = S(T(x)) = S(0) = 0.$$

   Also ist $\ker(T) = \{0\}$, und somit ist T injektiv und $\dim(\ker(T)) = 0$.

   Mit der Dimensionsformel folgt daraus

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(\mathrm{im}(T)).$$

   Also ist T auch surjektiv. Da T bijektiv ist, existiert eine eindeutige Umkehrabbildung T^{-1}. Diese muss gleich S sein, da $S \circ T = \mathrm{id}_V$ ist. Folglich gilt auch $T \circ S = \mathrm{id}_V$

3. Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch Linksmultiplikation mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Solution: Eine Basis des Kerns ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und eine Basis des Bildes ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und

$$T \in \operatorname{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ ist eine } \mathbb{K}\text{-lineare Abbilung}\}.$$

   (a) Beweisen Sie

      i. Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$T^{-1}(W') := \{v \in V \mid T(v) \in W'\}$$

      ein Unterraum von V.

      ii. Es gilt

$$\dim(T^{-1}(W')) = \dim T^{-1}(0) + \dim(\operatorname{im}(T) \cap W').$$

   (b) Beweisen Sie

      i. T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $S \circ T = \mathrm{id}_V$.

      ii. T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $T \circ S = \mathrm{id}_W$.

   (c) Finden Sie Beispiele für Abbildungen T und S wie in ($b.i$) und ($b.ii$), die jedoch nicht invertierbar sind.

Solution:

(a) Sei $V' := T^{-1}(W')$. Per Definition gilt $\ker(T) = T^{-1}(0)$.

   i. Wir müssen zeigen, dass V' nicht leer ist und dass für beliebige Elemente $x, y \in V'$ und beliebige $\alpha \in K$ die Summe $x + y$ und das Produkt αx wieder in V' liegen.
   Wegen $T(0) = 0 \in W'$ liegt 0 in V' und V' ist nicht leer. Da f linear ist, gilt

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{und} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

   Wegen $T(x)$, $T(y) \in W'$ folgt aus den Unterraumaxiomen, dass auch $T(x) + T(y)$ und $\alpha T(x)$ wieder in W' liegen. Somit liegen $x + y$ und αx wieder in V'.

ii. Aus der Definition von V' folgt, dass wir eine wohldefinierte Abbildung

$$T'\colon V' \to W',\ v' \mapsto T'(v') := T(v)$$

haben. Man prüft direkt, dass T' eine lineare Abbildung ist. Es folgt

$$\dim(V') = \dim(\ker(T')) + \dim(\mathrm{im}(T')). \tag{1}$$

Da $0_W \in W'$ ist, gilt $\ker(T) \subseteq V'$. Durch Einsetzen der Definition erhält man

$$\ker(T') = \ker(T).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(T') &= \{w \in W' \mid \exists v \in V' : T'(v) = w\} \\
&= \{w \in W' \mid \exists v \in V : T(v) = w\} \\
&= \{w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w \text{ und } w \in W'\} \\
&= \mathrm{im}(T) \cap W'\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$\dim(V') = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T) \cap W')\,.$$

Aliter: Man kann auch den Beweis der Vorlesung wiederholen, mit einer Basis B' von $\ker(T)$ beginnen, diese zu einer Basis B von $T^{-1}(W')$ erweitern und zeigen, dass T das Komplement $B \smallsetminus B'$ bijektiv auf eine Basis von W' abbildet.

(b) i. Ist $S \circ T = \mathrm{id}_V$, so ist $S \circ T$ injektiv und folglich auch T injektiv. Dies zeigt die Implikation "$\Leftarrow$".
Sei umgekehrt T injektiv. Dann ist mit $W_1 := \mathrm{im}(T)$ die Abbildung

$$T\colon V \to W_1$$

bijektiv und linear, also ein Isomorphismus (siehe Vorlesung). Sei $S_1\colon W_1 \to V$ die Umkehrabbildung. Wähle ein Komplement W_2 zu W_1 in W und definiere die Abbildung

$$S\colon W \to V$$

durch $S(w_1 + w_2) := S_1(w_1)$ für alle $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$. Wegen $W = W_1 \oplus W_2$ ist S wohldefiniert und man prüft direkt, dass S linear ist. Für alle $v \in V$ ist weiter $T(v) \in W_1$ und somit

$$S \circ T(v) = S|_{W_1}(T(v)) = S_1(T(v)) = v$$

also ist $S \circ T = \mathrm{id}_V$. Dies zeigt die Implikation "$\Rightarrow$".

ii. Ist $T \circ S = \mathrm{id}_W$, so ist $w = \mathrm{id}_W(w) = T(S(w))$ für jedes $w \in W$, die Abbildung T also surjektiv. Dies zeigt die Implikation "$\Leftarrow$".
Sei umgekehrt T surjektiv. Sei V_2 ein Komplement von $V_1 := \ker(T)$ in V und betrachte die Abbildung

$$T_2 := T|_{V_2} \colon V_2 \to W.$$

Dann ist $\ker(T_2) = \ker(T) \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = 0$ und somit T_2 injektiv. Nach Voraussetzung existiert für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $T(v) = w$. Schreiben wir $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, so folgt $T(v) = T(v_2) = w$. Daher ist T_2 auch surjektiv und damit ein Isomorphismus von V_2 nach W.
Sei $S_2 \colon W \to V_2$ die Umkehrabbildung von T_2 und sei S die Komposition von S_2 mit der Inklusionsabbildung $V_2 \hookrightarrow V$. Da S_2 und die Inklusionsabbildung linear sind, ist S linear. Für alle $w \in W$ ist $S(w) \in V_2$ und es gilt

$$T(S(w)) = T|_{V_2}(S(w)) = T_2(S_2(w)) = w\,,$$

also ist $T \circ S = \mathrm{id}_W$. Dies zeigt die Implikation "$\Rightarrow$".

(c) Zum Beispiel ist die Abbildung $T_{(i)} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ linear und injektiv, allerdings nicht invertierbar.
Die Abbildung $T_{(ii)} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist linear und surjektiv, aber nicht invertierbar.
Beachte jedoch, dass $T_{(ii)} \circ T_{(i)} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ gilt.

5. Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x-2y, -2x+4y, 3x-6y)$. Finden Sie Basen von $\mathbb{R}^2$ und von $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Matrix $A = (a_{ij})$ von f die Form

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

annimmt.

Solution: Wir beobachten zuerst dass $\ker(f) = \mathbb{R} \cdot (2, 1)$ und $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 3)$ gilt. Der Kern von f wird also durch den Vektor $v_2 = (2, 1)$ erzeugt, und wir ergänzen diesen mit dem Vektor $v_1 = (1, 0)$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$.
Des Weiteren, ergänzen wir den Vektor $w_1 = (1, -2, 3)$, mit $w_2 = (1, 0, 0)$ und $w_3 = (0, 1, 0)$ zu einer Basis $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_2\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Dann hat die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ die gewünschte Form:

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Betrachten Sie den Endomorphismus $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $T_A^2 := T_A \circ T_A \neq 0$, aber $T_A^3 := T_A^2 \circ T_A = 0$.

(b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $T_A(u) = 0$, $T_A(v) = u$, $T_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.

Solution:

(a) Zunächst berechnen wir die Abbildungsmatrix von T_A^2 bezüglich der Standardbasis
$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$T_A^2(e_1) = T_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$T_A^2(e_2) = T_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$T_A^2(e_3) = T_A\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ist

$$[T_A^2]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ungleich der Nullabbildung.
Wir berechnen die Abbildungsmatrix von T_A^3 bezüglich der Standardbasis

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$T_A^3(e_1) = T_A^2\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T_A^3(e_2) = T_A^2\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T_A^3(e_3) = T_A^2\left(\begin{pmatrix}-10\\-7\\-4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Also ist $T_A^3 = 0$.

(b) Seien $w := e_1$, $v := T_A(w)$ und $u := T_A(v)$. Wir müssen zeigen, dass $\{u, v, w\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$0 = \lambda w + \mu v + \nu u = \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda + 2\mu + 6\nu\\ \mu + 4\nu\\ 2\nu\end{pmatrix}$$

dann folgt $\lambda = \mu = \nu = 0$ und folglich ist $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ Es ist (wie bereits oben berechnet)

$$T_A(u) = \begin{pmatrix}2 & 2 & -10\\ 1 & 2 & -7\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

wie gewünscht.
Es gilt (siehe oben)

$$\begin{aligned} T_A(u) &= 0 = 0u + 0v + 0w\\ T_A(v) &= u = 1u + 0v + 0w\\ T_A(w) &= v = 0u + 1v + 0w \end{aligned}$$

und folglich

$$[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

7. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 + x_3\\ x_1 - x_4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\ x_1 - x_2\\ 3x_1\end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von

 i. f bezüglich der Basen a, b.

 ii. g bezüglich der Basen b, c.

 iii. $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

Solution:

(a) Man überprüft durch Umformung in reduzierte Zeilenstufenform, dass die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aus linear unabhängigen Spalten bestehen. Dies zeigt, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Die Abbildungen f und g sind durch Linksmultiplikation mit einer Matrix darstellbar, nämlich $f = T_D$ und $g = T_E$ für

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $g \circ f = T_E \circ T_D = T_{ED}$ für die Matrix

$$ED = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen D, E, ED sind gleichzeitig die Abbildungsmatrizen von $f, g, g \circ f$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen $\mathcal{B}_n := \{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ (für $n = 2, 3, 4$), das heisst, es gilt

$$D = [f]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}_2}, \quad E = [g]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3} \quad \text{und} \quad ED = [g \circ f]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}_3}.$$

Um jedoch herauszufinden wie die Abbildungsmatrizen von f, g und $g \circ f$ bezüglich der Basen $a, b,\ b, c$ beziehungsweise a, c aussehen, müssen wir die entsprechenden Abbildungen auf die Ausgangsbasis anwenden.
Die Matrix A ist jedoch genau die Abbildungsmatrix derjenigen Abbildung h, welche die Basis a mit Hilfe der Standardbasis $\mathcal{B}_4$ ausdrückt, das heisst $A = [h]^a_{\mathcal{B}_4}$ und die Matrix C ist genau die Abbildungsmatrix derjenigen Abbildung h', welche die Basis c mit Hilfe der Standardbasis $\mathcal{B}_3$ ausdrückt, das heisst $C = [h']^c_{\mathcal{B}_2}$. Dementsprechend ist C^{-1} die Abbildungsmatrix jener Abbildung h", welche die Basis Standardbasis $\mathcal{B}_3$ mit Hilfe der Basis c ausdrückt. Eine Rechnung liefert

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

i. Die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen a und $b = \mathcal{B}_2$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} [f]^a_b &= [f]^{\mathcal{B}_4}_b \cdot [h_a]^a_{\mathcal{B}_4} \\ &= D \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii. Für g ist die Matrixdarstellung bezüglich der Basen $b = \mathcal{B}_2$ und c gleich

$$\begin{aligned} [g]^b_c &= [h"]^{\mathcal{B}_3}_c [g]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3} \\ &= C^{-1} \cdot E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iii. Die Matrixdarstellung von $g \circ f$ bezüglich der Basen a und c ist dann

$$\begin{aligned} [g \circ f]^a_c = [g]^b_c \cdot [f]^a_b &= C^{-1} \cdot E \cdot D \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 & -7 \\ -2 & -11 & -4 & -5 \\ 10 & 42 & 16 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$