Serie 8

1. Seien U, V, W beliebige endlich-dimensionale Vektorräume. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt
   $$\mathrm{rk}(f+g) \;\leqslant\; \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$

   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt
   $$\mathrm{rk}(g \circ f) \;\leqslant\; \min\big\{\,\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g)\big\}.$$

   (c) Formulieren und beweisen Sie analoge Eigenschaften für Matrizen.

2. Sei V ein nichttrivialer endlich-dimensionaler Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) V ist eine direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen, d.h. V kann geschrieben werden als
   $$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n,$$
   wobei U_i ein 1-dimensionaler Unterraum für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ ist.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

   (c) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.

3. Seien $\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
   Sei $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen vom $\mathbb{R}^3$ sind.

   (b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_1 (bzw. T_2) des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ (bzw. von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).

   (c) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass $T_1\,T_2 = T_2\,T_1 = I$ gilt.

4. Sei $T : V \to W$ eine invertierbare lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. Geben Sie einen Beweis oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgende Aussage:
   $$\big([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}\big)^{-1} = [T^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist. Zeige:

   (a) Für jede Projektion P gilt
   $$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

   (b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei beliebige Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$, sodass gilt:
   $$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

6. Betrachten Sie die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch
   $$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum ist.

   (b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*
   $$E^\perp := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$
   ein nicht-trivialer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und zeigen Sie $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^3$.

   (c) Sei $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die *orthogonale Projektion* auf E, d.h. P ist eine Projektion mit $\mathrm{Ker}(P_E) = E^\perp$ und $\mathrm{Im}(P_E) = E$. (Wegen Aufgabe 3 wissen Sie schon, dass diese Projektion existiert.)
   Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass
   $$[P_E]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Bestimmen Sie $[P_E]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}$, wobei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

7. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $V_n = \langle 1, \ldots, t^n \rangle \subset \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$. Es sei $B_n = (1, \ldots, t^n)$ eine Basis und
   $$\mathrm{D}_n \colon V_n \to V_{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1}$$
   der Ableitungshomomorphismus.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{B}_{n-1}}$.

   (b) Wir betrachten das geordnete Tupel $C_n = (1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+\ldots+t^n)$ in V_n.
   Zeigen Sie, dass C_n eine Basis von V_n ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $[\mathrm{id}_{V_n}]^{B_n}_{C_n}$ und $[\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n}$.

   (c) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}}$.