Lösungen 8

1. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt
   $$\mathrm{rk}(f+g) \;\leqslant\; \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$

   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt
   $$\mathrm{rk}(g \circ f) \;\leqslant\; \min\big\{\,\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g)\big\}.$$

   (c) Formulieren und beweisen Sie analoge Eigenschaften für Matrizen.

   Solution:

   (a) Es gilt
   $$\mathrm{im}(f+g) \subset \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g),$$
   denn für alle $u \in U$ ist $(f+g)(u) = f(u) + g(u) \in \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$, woraus folgt
   $$\mathrm{rk}(f+g) = \dim \mathrm{im}(f+g) \leqslant \dim \mathrm{im}(f) + \dim \mathrm{im}(g) = \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g)\,.$$

   (b) Wegen $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im}(g)$, gilt sicherlich $\mathrm{rk}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rk}(g)$.
   Da die Abbildung
   $$g|_{\mathrm{im}(f)} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g \circ f)$$
   linear und surjektiv ist, gilt zudem aufgrund der Dimensionsformel
   $$\dim \mathrm{im}(g \circ f) = \dim \mathrm{im}(f) - \dim \ker(g|_{\mathrm{im}(f)}) \leqslant \dim \mathrm{im}(f)$$
   und damit auch die Gesamtaussage.

   (c) Da der Rang der $n \times m$-Matrix A gleich dem Rang der linearen Abbildung $T_A : K^m \to K^n, v \mapsto T_A v$ ist, folgt:

   (i) Für beliebige $n \times m$ Matrizen A und B gilt:
   $$\mathrm{rk}(A+B) \leqslant \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)\,.$$

   (ii) Für jede $m \times n$ Matrix A und jede $n \times r$ Matrix B gilt:
   $$\mathrm{rk}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))\,.$$

2. Sei V ein nichttrivialer endlich-dimensionaler Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) V ist eine direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen, d.h. V kann geschrieben werden als
   $$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n,$$
   wobei U_i ein 1-dimensionaler Unterraum für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ ist.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

   (c) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.

   Solution:

   (a) Diese Aussage ist richtig. Sei $\mathcal{B} = \{b_1 \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung
   $$\mathbb{K}^n \to V,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$$
   bijektiv. Andererseits ist jedes Element $b \in \mathcal{B}$ ungleich Null und somit ist die Abbildung $\mathbb{K} \to \langle b \rangle$, $x_b \mapsto x_b b$ bijektiv. Also ist auch die Abbildung
   $$\langle b_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_n \rangle \to V,\ (x_1 b_1, \ldots, x_n b_n) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$$
   bijektiv. Somit ist $V = \langle b_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_n \rangle$ die direktet Summe von 1-dimensionalen Unteräumen.

   (b) Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel den durch Linksmultiplikation mit der Matrix
   $$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   gegebenen Endomorphismus $T_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\ker(T_A) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \operatorname{im}(T_A)$. Die zwei Unterräume haben weder den Durchschnitt $\{0\}$, noch erzeugen sie zusammen $\mathbb{R}^2$, daher können sie nicht die direkte Summe $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ bilden.

   (c) Diese Aussage ist falsch, zum Beispiel für die Unterräume $V_1 := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ und $V_2 := \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ und $V_3 := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ von $\mathbb{R}^2$ gilt
   $$V = V_1 + V_2 + V_3,$$
   sowie
   $$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\},$$
   jedoch gilt nicht
   $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

3. Seien $\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \right)$.
Sei $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen vom $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_1 (bzw. T_2) des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ (bzw. von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).

(c) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass $T_1\, T_2 = T_2\, T_1 = I$ gilt.

Solution:

(a) Explizite Rechnungen zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Da die Mengen jeweis Kardinalität 3 haben, sind sie Basen des $\mathbb{R}^3$.

(b) Seien $\mathcal{B}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{B}_2 = (y_1, y_2, y_3)$. Wir wollen die Vektoren von $\mathcal{B}_1$ als linear kombination der Vektoren von $\mathcal{B}_2$ schreiben. Also ist

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} (T_1)_{ji}\, y_j$$

und

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} (T_2)_{ji}\, x_j.$$

Durch Lösen von drei 3×3-Gleichungssystemen für die 9 Koeffizienten von z.B. T_2 folgt:

$$\begin{aligned} y_1 &= -3\,x_1 \; -7\,x_2 \; +3\,x_3 \\ y_2 &= -x_1 \; -4\,x_2 \; +3\,x_3 \\ y_3 &= \; -x_2 \; +x_3 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Indizes folgt:

$$T_2 = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = ([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sei $T : V \to W$ eine invertierbare lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. Geben Sie einen Beweis oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgende Aussage:

$$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Solution: Diese Aussage ist falsch. Im allgemeinen gilt

$$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Nicht einmal wenn $V = W$ gilt, und die Abbildung $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ auch definiert ist gilt diese Aussage.
Wir betrachten das folgende Gegenbeispiel. Es sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis, sowie $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ wobei

$$c_1 = 3e_1 + 4e_2, \quad c_2 = 2e_1 + 3e_2,$$

gilt. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, definiert auf der Basis $\mathcal{B}$ durch

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2, \\ T(e_2) &= e_1 - 3e_2. \end{aligned}$$

Dann ist $T(e_1) = -2c_1 + 3c_2$ sowie $T(e_2) = 9c_1 - 13c_2$. Somit gilt

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Die inverse lineare Abbildung T^{-1} ist auf der Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} T^{-1}(e_1) &= 3e_1 + e_2, \\ T^{-1}(e_2) &= e_1, \end{aligned}$$

denn $T(e_1) = e_2$ und $T(3e_1 + e_2) = e_1$.
In der Basis $\mathcal{C}$ ausgedrückt ergibt das

$$\begin{aligned} T^{-1}(e_1) &= 7c_1 - 9c_2, \\ T^{-1}(e_2) &= 3c_1 - 4c_2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

und somit

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 24 \\ 6 & -29 \end{pmatrix}$$

was nicht die Identitätsmatrix ist.
Betrachten wir die lineare Abbildung T^{-1} jedoch als lineare Abbildung der Ausgangsbasis $\mathcal{C}$ und der Endbasis $\mathcal{B}$ so erhalten wir folgendes. Die Abbildung T^{-1} sendet die Basis $\mathcal{C}$ nach

$$T^{-1}(c_1) = T^{-1}(3e_1 + 4e_2) = 3(3e_1 + e_2) + 4e_1 = 13e_1 + 3e_2,$$
$$T^{-1}(c_2) = T^{-1}(2e_1 + 3e_2) = 2(3e_1 + e_2) + 3e_1 = 9e_1 + 2e_2.$$

Daher folgt

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

was wir zeigen wollten.

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist. Zeige:

   (a) Für jede Projektion P gilt

   $$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

   (b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei beliebige Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$, sodass gilt:

   $$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

Solution:

(a) Sei $P : V \to V$ eine Projektion und setze

$$W_1 := \mathrm{Kern}(P) \quad \text{und} \quad W_2 := \mathrm{Bild}(P)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = 0$ ist.
Für ein beliebiges $v \in V$ gilt

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0,$$

also ist $v - P(v) \in \mathrm{Kern}(P) = W_1$. Weiter ist $P(v) \in \mathrm{Bild}(P) = W_2$. Damit ist

$$v = (v - P(v)) + P(v)$$

eine Zerlegung von v in eine Summe von $v - P(v) \in W_1$ und von $P(v) \in W_2$. Es bleibt also zu zeigen, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sei dazu $v \in W_1 \cap W_2$. Da v im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$, sodass $P(w) = v$ ist. Wenden wir P auf beide Seiten der Gleichung an, so folgt $P^2(w) = P(w) = P(v)$. Da aber v ebenfalls im Kern von P ist, haben wir $0 = P(v) = P(w) = v$.

(b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei beliebige Untervektorräume von V mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existiert für jedes $v \in V$ eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, sodass $v = w_1 + w_2$ ist. Definiere die Abbildung $P : V \to V$ durch $P(v) = w_2$, wobei $w_2 \in W_2$ das eindeutige Element in W_2 ist mit $v = w_1 + w_2$ für ein $w_1 \in W_1$. Man prüft nun direkt, dass P linear und eine Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P)$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P)$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass P eindeutig ist. Sei P' eine weitere Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P')$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P')$. Dann ist

$$P|_{W_1} = 0 = P'|_{W_1}\,.$$

Für ein beliebiges Element $w \in W_2$, gibt es Elemente $v, v' \in V$, so dass $P(v) = w$ und $P'(v') = w$ ist. Es folgt

$$P(w) - P'(w) = P(P(v)) - P'(P'(v')) = P(v) - P'(v') = w - w = 0$$

und damit stimmen P und P' auf W_2 überein, das heisst $P|_{W_2} = P'|_{W_2}$. Da $V = W_1 \oplus W_2$ ist, gilt damit $P = P'$, denn auf den beiden Untervektorräumen W_1 und W_2 sind P und P' identisch.

6. Betrachten Sie die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

(a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*

$$E^\perp := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$

ein nicht-trivialer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und zeigen Sie $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^3$.

(c) Sei $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die *orthogonale Projektion* auf E, d.h. P ist eine Projektion mit $\mathrm{Ker}(P_E) = E^\perp$ und $\mathrm{Im}(P_E) = E$. (Wegen Aufgabe 3 wissen Sie schon, dass diese Projektion existiert.)
Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Bestimmen Sie $[P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$, wobei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Solution:

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto x - y + z$. Dann ist f linear, da $f = T_{(1,-1,1)}$ und $E = \operatorname{Ker}(f)$, also ist E ein Unterraum. Wir bemerken, dass $f \neq 0$, da
$$f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = 1.$$
Folglich ist $\operatorname{Rang}(f) \geqslant 1$ und da $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, folgt $\operatorname{Rang}(f) = 1$. Also ist $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{Rang}(f) = 2$.

(b) Für zwei gegebene Vektoren $v = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right), v' = \left(\begin{smallmatrix}x'\\y'\\z'\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, schreiben wir
$$\langle v, v'\rangle := xx' + yy' + zz'$$
Seien $v'' = \left(\begin{smallmatrix}x"\\y"\\z"\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, dann ist
$$\begin{aligned}\langle v, v' + \lambda v''\rangle =& x(x' + \lambda x'') + y(y' + \lambda y'') + z(z' + \lambda z'')\\ =& xx' + yy' + zz' + \lambda(xx'' + yy'' + zz'')\\ =& \langle v, v'\rangle + \lambda\langle v, v''\rangle\end{aligned}$$
Also ist $\langle v, v'\rangle$ linear in der zweiten Komponente.

Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E (vgl. Teilaufgabe 6a). Dann impliziert die obige Rechnung, dass $v \in E^\perp$ genau dann, wenn $\langle v, v_1\rangle = \langle v, v_2\rangle = 0$ gilt. Dieselbe Rechnung wie vorhin angewendet auf die erste Komponente zeigt, dass die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1 : v \mapsto \langle v, v_1\rangle$ und $f_2 : v \mapsto \langle v, v_2\rangle$ linear sind. Also gilt
$$E^\perp = \operatorname{Ker}(f_1) \cap \operatorname{Ker}(f_2).$$
Da $v_1, v_2 \neq 0$, sind f_1, f_2 nicht-trivial: gegeben k existiert ein $1 \leqslant i \leqslant 3$ so dass $f_k(e_i) \neq 0$; sei nämlich i so gewählt, dass die i-te Komponente von v_k nicht 0 ist, dann ist $f_k(e_i)$ gleich der i-ten Komponente von v_k und somit ist $f_k \neq 0$. Dies zeigt, dass $\dim \operatorname{Ker}(f_1) = \dim \operatorname{Ker}(f_2) = 2$ und daraus folgt
$$\begin{aligned}\dim E^\perp =& \dim\big(\operatorname{Ker}(f_1) \cap \operatorname{Ker}(f_2)\big)\\ =& \dim \operatorname{Ker}(f_1) + \dim \operatorname{Ker}(f_2) - \dim(\underbrace{\operatorname{Ker}(f_1) + \operatorname{Ker}(f_2)}_{\subset \mathbb{R}^3}) \geqslant 1\end{aligned}$$
Angenommen $v = (x, y, z) \in E \cap E^\perp$, dann ist
$$0 = \langle v, v\rangle = x^2 + y^2 + z^2$$

und folglich $v = 0$. Also ist

$$\dim(E + E^\perp) = \dim E + \dim E^\perp - \dim(E \cap E^\perp) \geqslant 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

und es folgt $\mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp$. Man beachte, dass dies zeigt, dass

$$\dim E^\perp = \dim(E \oplus E^\perp) - \dim E = \dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1.$$

(c) Wir haben in Aufgabe 3 bereits gezeigt, dass $w = P_E(v)$ genau dann gilt, wenn $w \in E$ und $v - P_E(v) \in E^\perp$. Daraus folgt, dass $P_E(v) = v$ für alle $v \in E$. Sei also $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E, dann ist $P_E(v_1) = v_1$ und $P_E(v_2) = v_2$. Falls $\{v_3\}$ eine Basis von $E^\perp$, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $[P_E]_\mathcal{B}$ hat die gewünschte Form. Es bleibt, v_1, v_2, v_3 explizit zu bestimmen.
Man überprüft leicht, dass z. B. $v_1 = (1, 2, 1)$ und $v_2 = (1, 0, -1)$ in E liegen. Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ gilt

$$0 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$$

und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E.
Wir wählen $v_3 = (-2, 2, -2)$, d.h. $v_3 = v_1 \times v_2$, wobei $\times$ das in der Schule diskutierte Kreuzprodukt beschreibt. Dann ist $v_3 \in E^\perp$. Alternativ bestimmt man den Vektor $v_3 = (x, y, z)$ als eine der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 = \langle (x, y, z), v_1 \rangle &= x + 2y + z \\ 0 = \langle (x, y, z), v_2 \rangle &= x - z \end{aligned}$$

Wie eingangs beschrieben, ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis für die gilt

$$[P_E]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\mathcal{B}$ in keiner Weise eindeutig ist. Beispielsweise ist $\{v_3'\}$ gegeben durch $v_3' = (1, -1, 1)$ ebenfalls eine Basis von $E^\perp$. Also gilt für $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3')$ ebenfalls

$$[P_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [P_E]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Wir verwenden $[P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^\mathcal{B} [P_E]_\mathcal{B}^\mathcal{B} [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_\mathcal{B}^{\mathcal{E}_3}$. Es gilt sicherlich

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Für die Umkehrung des Basiswechsels überlegen wir uns, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen nun $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_j$ für $j = 1, 2, 3$ und erhalten

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Matrix hätte man nahezu unmöglich direkt berechnen können. Die Verwendung von Basiswechselmatrizen erscheint auf den ersten Blick vielleicht als Umweg, sie macht das Argument im Grunde genommen aber relativ einfach und es gibt nur wenig Gelegenheit Fehler zu machen, insbesondere wenn wir später lernen $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$ direkt anhand von $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ zu bestimmen.

7. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $V_n = \langle 1, \ldots, t^n \rangle \subset \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$. Es sei $B_n = (1, \ldots, t^n)$ eine Basis und

$$\mathrm{D}_n \colon V_n \to V_{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1}$$

der Ableitungshomomorphismus.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]_{\mathcal{B}_{n-1}}^{\mathcal{B}_n}$.

(b) Wir betrachten das geordnete Tupel $C_n = (1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+\ldots+t^n)$ in V_n.
Zeigen Sie, dass C_n eine Basis von V_n ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $[\mathrm{id}_{V_n}]_{C_n}^{B_n}$ und $[\mathrm{id}_{V_n}]_{B_n}^{C_n}$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}}$.

Solution:

(a) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren $1, \ldots, t^n$ in der Basis B_{n-1}:

$$\mathrm{D}_n(1) = 0\,, \mathrm{D}(t) = 1\,, \mathrm{D}(t^2) = 2t\,, \ldots, \mathrm{D}(t^n) = nt^{n-1}\,.$$

Folglich ist

$$[\mathrm{D}]^{B_n}_{B_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

(b) Da $t^i = (1 + \ldots + t^i) - (1 + \ldots + t^{i-1})$ wird V_n durch C_n erzeugt. Da C_n aus $n + 1 = \dim V_n$ Vektoren besteht, sind diese auch linear unabhängig. Wir erhalten unmittelbar die Transformationsmatrizen

$$[\mathrm{id}_{V_n}]^{B_n}_{C_n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ [\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} [\mathrm{D}]^{C_n}_{C_{n-1}} &= [\mathrm{id}_{V_n}]^{B_{n-1}}_{C_{n-1}} \cdot [\mathrm{D}]^{B_n}_{B_{n-1}} \cdot [\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$