Serie 9

1. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie jeweils Basen von $\ker(T)$ und $\operatorname{im}(T)$.

2. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \ p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

   (b) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

3. Seien V ein Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt für die gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^{n+1}(v) = 0.$$

   Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

4. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^4$:

   (a)
$$\begin{aligned} 4x - 9y + 2z &= 5 \\ 2x + 2y + z &= 9 \\ -3x + 8z &= 18 \\ x - 2y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} \diamondsuit + 6\heartsuit + 7\clubsuit + 12\spadesuit &= 1 \\ 2\diamondsuit + 5\heartsuit + 8\clubsuit + 11\spadesuit &= 1 \\ 3\diamondsuit + 4\heartsuit + 9\clubsuit + 10\spadesuit &= 1 \end{aligned}$$

5. Beweisen Sie:

   (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat genau dann Rang $\leqslant r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ gibt, so dass $C = AB$.

   (b) Ist $\mathrm{rk}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ gelten.

6. Es sei V ein Vektorraum ueber einem Körper K und U ein Unterraum. Definieren Sie folgende Relation auf V: für Vektoren $w, v \in V$ gilt "$w \sim v$", wenn $w - v \in U$.

   (a) Zeigen Sie, dass das eine Aequivalenzrelation auf V definiert.

   Die Aequivalenzklassen heissen die Nebenklassen von U in V; wir schreiben V/U fuer die Menge aller Nebenklassen. . Es seien $A, B \in V/U$, d.h. A und B sind zwei Nebenklassen von U in V. Definieren Sie "$A+B$" wie folgt: wahlen Sie $a, b \in V$ so dass $A = a+U, B = b+U$. Dann ist $A+B$ definiert als die Nebenklasse $(a+b)+U$.

   (b) Zeigen Sie, dass $A+B$ wohl-definiert ist (das heisst wenn $a+U = a'+U$ und $b+U = b'+U$, dann gilt $(a+b)+U = (a'+b')+U$).

   (c) Definieren Sie eine Skalarmultiplikation von K auf V/U und zeigen Sie, dass diese wohldefiniert ist.

   (d) Zeigen Sie, dass V/U durch diese Operationen die Struktur eines K-Vektorraums erhaelt; er heisst der Quotientenraum von V durch U.

   *(e) Nehmen Sie an, dass V n-dimensional und U m-dimensional ist. Was ist die Dimension von V/U?