Lösungen 9

1. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von $\ker(T)$ und $\operatorname{im}(T)$.

Solution:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Bx = 0$ erhällt man $(1, 0, 0, -1, -1)^t, (0, 1, -1, -1, -1)^t$ als Basis von $\ker(T_B)$. Die ersten beiden Spaltenvektoren lassen sich durch die letzten drei ausdrücken, und diese drei sind offensichtlich linear unabhängig. Also bilden die letzten drei Spaltenvektoren eine Basis von $\operatorname{im}(T_B)$.

(b) $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sei zunächst $(a, b)^t \neq 0$, $(c, d)^t \neq 0$. Jedes $(x, y) \in \ker(T_C)$ erfüllt

$$0 = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acx + ady \\ bcx + bdy \end{pmatrix} = (cx + dy) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dies gilt genau dann wenn $cx + dy = 0$ und somit

$$\ker(T_C) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid cx + dy = 0\}.$$

Da $xc + dy$, für$(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen kann folgt aus der obigen Gleichung $\operatorname{im}(T_C) = \langle (a, b)^\top \rangle$.

Falls $(a, b)^t = 0$ oder $(c, d)^t = 0$, so ist $T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Nullabbildung und wir erhalten $\ker(T_C) = \mathbb{R}^2$ und $\operatorname{im}(T_C) = \{0\}$.

2. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass

$$F \colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \ p \mapsto p'' + p'$$

eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

Solution:

(a) Wegen

$$(\lambda p + \mu q)' = (\lambda p)' + (\mu q)' = \lambda p' + \mu q'$$

für alle $p, q \in P_n(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Ableitungsabbildung $p \mapsto p'$ linear. Da die Verknüpfung linearer Abbildungen wieder linear ist, ist auch die Bildung der zweiten Ableitung linear. Da die Summe zweier linearer Abbildungen linear ist, ist somit auch $p \mapsto p'' + p'$ linear.

(b) Es gilt

$$F(x^j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ jx^{j-1} + j(j-1)x^{j-2} & \text{für } j \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Also die Darstellungsmatrix von F bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{C} = (1, x, \ldots, x^n)$ gleich

$$[F]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \big(j\delta_{i,j-1} + j(j-1)\delta_{i,j-2}\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n},$$

wobei die Indizierung der Matrix bei 0 beginnt.

Für $n \geqslant 2$ lässt sich diese Matrix alternativ auch schreiben als

$$[F]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Seien V ein Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt für die gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

Solution: Wir wissen, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ alle ungleich Null sind. Denn aus $F^i(v) = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant n$ folgt $F^n(v) = F^{n-i}(F^i(v)) = 0$. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit

$$a_0 v + a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = F^n(0) &= F^n\left(a_0 v + \ldots + a_n F^n(v)\right) \\ &= a_0 F^n(v) + a_1 F^{n+1}(v) + \ldots + a_n F^{2n}(v) = a_0 F^n(v) \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen $F^k(v) = 0$ für $k > n$ gebraucht haben. Wir schliessen daraus dass $a_0 = 0$ gelten muss. Also gilt

$$a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v) = 0.$$

Wir argumentieren nun genau gleich wie im ersten Schritt. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = F^{n-1}(0) &= F^{n-1}\left(a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v)\right) \\ &= a_1 F^n(v) + \ldots + a_n F^{2n-1}(v) = a_1 F^n(v) \end{aligned}$$

woraus $a_1 = 0$ folgt. So können wir weiterfahren und daraus schliessen dass $a_i = 0$ für alle $0 \leqslant i \leqslant n$ gelten muss. Also sind die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig.

4. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^4$:

   (a)

$$\begin{aligned} 4x - 9y + 2z &= 5 \\ 2x + 2y + z &= 9 \\ -3x + 8z &= 18 \\ x - 2y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \diamondsuit + 6\heartsuit + 7\clubsuit + 12\spadesuit &= 1 \\ 2\diamondsuit + 5\heartsuit + 8\clubsuit + 11\spadesuit &= 1 \\ 3\diamondsuit + 4\heartsuit + 9\clubsuit + 10\spadesuit &= 1 \end{aligned}$$

Solution: Wir nutzen Satz 4.7.9 und Korollar 4.7.10 um die Anzahl an Lösungen zu bestimmen.

(a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ -3 & 0 & 8 & 18 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

haben beide Rang $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_b) = 3$ somit folgt nach Korollar 4.7.10 die Existenz einer eindeutigen Lösung x^*.
Diese Lösung ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$C_b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 7 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

haben denselben Rang $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(C_b) = 2$. Da dieser Rang jedoch kleiner ist als die Anzahl an Variablen, gibt es keine eindeutige Lösung. Der Kern dieser Matrix ist nicht leer, somit gibt es unendlich viele Lösungen.

5. Beweisen Sie:

(a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat genau dann Rang $\leqslant r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ gibt, so dass $C = AB$.

(b) Ist $\mathrm{rk}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ gelten.

Solution:

(a) Nach Aufgabe 1 der 8. Serie ist $\mathrm{rk}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)\}$ und daher $\mathrm{rk}(C) \leqslant r$ falls $C = AB$ gilt. Andersherum nehmen wir an, dass $\mathrm{rk}(C) \leqslant r$. Wir betrachten C als darstellende Matrix einer linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ bzgl. der Standardbasen $\mathcal{E}_n$ bzw. $\mathcal{E}_m$. Da der Rang von C kleinergleich r ist, können wir $im(f)$ in einen Unterraum U von K^m der Dimension r einbetten. Dann ist f die Komposition

$$K^n \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\iota} K^m\,,$$

wobei die zweite und dritte Abbildungen φ und ι die Inklusionen sind. Nach Wahl einer Basis $\mathcal{C}$ von U ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen beschrieben durch eine Matrix $B = [f \circ \varphi]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n}$, die dritte Abbildung durch eine Matrix $A = [\iota]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{C}}$ und daher $C = AB$.

Alternativer Beweis für die Rückrichtung: Wir haben gesehen, dass jede $m \times n$-Matrix C äquivalent ist zur Normalform $N = \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mit $r' = \mathrm{rk}(C)$, also $C = SNT$, mit $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, $T \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar. Da aber $N = XY$ mit $X = \begin{pmatrix} E_{r'} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \end{pmatrix}$, können wir schreiben

$$C = \underbrace{SX}_{A}\underbrace{YT}_{B}.$$

Falls $r' < r$ können wir einfach $r - r'$ Nullzeilen bzw. Nullspalten hinzufügen.

(b) Falls $\mathrm{rk}(A) < r$ oder $\mathrm{rk}(B) < r$ erhalten wir nach Aufgabe 1 der 8. Serie direkt einen Widerspruch. Andererseits kann der Rang der Matrizen A und B auch nicht grösser sein, als deren Anzahl an Spalten, bzw. Zeilen. Daher folgt $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$.

6. Es sei V ein Vektorraum ueber einem Körper K und U ein Unterraum. Definieren Sie folgende Relation auf V: für Vektoren $w, v \in V$ gilt "$w \sim v$", wenn $w - v \in U$.

(a) Zeigen Sie, dass das eine Aequivalenzrelation auf V definiert.

Die Aequivalenzklassen heissen die Nebenklassen von U in V; wir schreiben V/U fuer die Menge aller Nebenklassen. . Es seien $A, B \in V/U$, d.h. A und B sind zwei Nebenklassen von U in V. Definieren Sie "$A+B$" wie folgt: wahlen Sie $a, b \in V$ so dass $A = a+U, B = b+U$. Dann ist $A+B$ definiert als die Nebenklasse $(a+b)+U$.

(b) Zeigen Sie, dass $A+B$ wohl-definiert ist (das heisst wenn $a+U = a'+U$ und $b+U = b'+U$, dann gilt $(a+b)+U = (a'+b')+U$).

(c) Definieren Sie eine Skalarmultiplikation von K auf V/U und zeigen Sie, dass diese wohldefiniert ist.

(d) Zeigen Sie, dass V/U durch diese Operationen die Struktur eines K-Vektorraums erhaelt; er heisst der Quotientenraum von V durch U.

*(e) Nehmen Sie an, dass V n-dimensional und U m-dimensional ist. Was ist die Dimension von V/U?

Solution:

(a) Wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

i. Reflexivität: Sei $v \in V$. Dann gilt $v - v = 0 \in U$, da U als Unterraum den Nullvektor enthält. Also ist $v \sim v$.

ii. Symmetrie: Seien $v, w \in V$ mit $v \sim w$. Dann gilt $v - w \in U$. Da U ein Unterraum ist, gilt auch $-(v - w) = w - v \in U$. Also folgt $w \sim v$.

iii. Transitivität: Seien $u, v, w \in V$ mit $u \sim v$ und $v \sim w$. Dann gilt $u-v \in U$ und $v-w \in U$. Da U ein Unterraum ist, folgt $(u-v)+(v-w) = u-w \in U$. Also gilt $u \sim w$.

(b) Wohldefiniertheit von $A + B$:

Seien $a, a', b, b' \in V$ mit $a + U = a' + U$ und $b + U = b' + U$. Dies bedeutet $a - a' \in U$ und $b - b' \in U$. Zu zeigen: $(a + b) + U = (a' + b') + U$

Dies ist äquivalent zu $(a + b) - (a' + b') \in U$. Es gilt: $(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in U$, da U als Unterraum unter Addition abgeschlossen ist.

(c) Für $\lambda \in K$ und $A \in V/U$ definieren wir die Skalarmultiplikation:

$$\lambda A := (\lambda a) + U \text{ für ein } a \in V \text{ mit } A = a + U$$

Wohldefiniertheit: Sei $a + U = a' + U$, also $a - a' \in U$. Dann ist $\lambda(a - a') = \lambda a - \lambda a' \in U$, da U unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Also gilt $(\lambda a) + U = (\lambda a') + U$.

(d) Wir zeigen, dass V/U ein K-Vektorraum ist:

i. $(V/U, +)$ ist eine abelsche Gruppe:
   - Assoziativität: $((A+B)+C) = (A+(B+C))$ folgt aus der Assoziativität in V
   - Kommutativität: $A+B = B+A$ folgt aus der Kommutativität in V
   - Neutrales Element: $0 + U$ ist neutral
   - Inverses Element: Zu $a + U$ ist $(-a) + U$ invers

ii. Die Skalarmultiplikation erfüllt:
   - $1 \cdot A = A$
   - $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
   - $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
   - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

   für alle $\lambda, \mu \in K$ und $A, B \in V/U$.

*(e) Sei $\dim(V) = n$ und $\dim(U) = m$. Dann gilt $\dim(V/U) = n - m$. Dies folgt daraus, dass man eine Basis von U zu einer Basis von V erweitern kann, und die Restklassen der zusätzlichen Basisvektoren eine Basis von V/U bilden.