Wiederholungsserie

Wenn nichts anderes gesagt ist, sei K ein beliebiger Körper.

1. Ein Forscher besucht eine Insel, auf der, wie er weiss, zwei verschiedene Stämme Eingeborener wohnen: Die Angehörigen des einen Stammes sagen immer die Wahrheit, die Angehörigen des anderen Stammes lügen immer. Der Forscher will eine Schlucht auf der Insel erkunden, stösst aber auf dem Weg auf eine Gabelung, bei der er nicht weiss, ob er rechts oder links abbiegen soll, um zur Schlucht zu gelangen. Zum Glück kommt ihm ein Eingeborener entgegen, von dem er aber nicht weiss, welchem Stamm er angehört. Wie kann der Forscher mit nur einer einzigen Frage herausfinden, welche Richtung er einschlagen muss?

2. Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

   (a) Für alle $x \in \varnothing$ gilt $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

   (b) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $x \in \varnothing$.

   (c) Für alle $x \in \varnothing$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \varnothing$.

   (d) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

   (e) Für alle $x \in \varnothing$ und für alle $y \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $\{x, y\} \nsubseteq \varnothing \cup \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

3. Sei A eine $n \times n$ Matrix über K mit der Eigenschaft $AX = XA$ für alle $n \times n$-Matrizen X über K. Zeige, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda I_n$.

4. Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j}$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}(A) \ := \ \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Zeige:

   (a) Für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times m$-Matrix B gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

   (b) Für jede invertierbare $n \times n$-Matrix U gilt $\mathrm{Spur}(UAU^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$.

   (c) Finde ein Gegenbeispiel zu der Aussage

$$\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(ACB).$$

5. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

6. Prüfe, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

7. Beweise oder widerlege: Für beliebige linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V und einen beliebigen Vektor $w \in V$ sind die Vektoren $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ linear abhängig genau dann, wenn $w \in \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$ ist.

8. Seien U, V zwei 5-dimensionale Untervektorräume von K^9. Zeige, dass $U \cap V \neq \{0\}$ ist.

9. Für welche natürlichen Zahlen m existiert ein K-Vektorraum V mit m verschiedenen Unterräumen $V_1, \ldots, V_m$, so dass für alle $i < j$ der Unterraum V_i ein Komplement von V_j ist?

10. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Folgen:

$$V := \big\{(x_i)_{i\geqslant 1} \bigm| x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geqslant 1\big\}.$$

Sei P_1 die Menge aller schliesslich polynomialen Folgen, das heisst, sei

$$P_1 := \big\{(x_i)_{i\geqslant 1} \in V \bigm| \exists N \geqslant 1,\ \exists \text{ Polynom } P(x) \text{ sodass } \forall i \geqslant N : x_i = P(i)\big\},$$

und sei P_2 die Menge aller periodischen Folgen, das heisst, sei

$$P_2 := \big\{(x_i)_{i\geqslant 1} \in V \bigm| \exists m \geqslant 1 \text{ sodass } \forall i \geqslant 1 : x_{i+m} = x_i\big\}.$$

Zeige, dass P_1 und P_2 Untervektorräume von V sind.

11. Schreibe die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$,

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+x_2+3x_3\\2x_1+2x_2+6x_3\\2x_1+3x_2+8x_3\\-x_1+x_2+x_3\\3x_1+x_2+5x_3\end{pmatrix}$$

als Linksmultiplikation mit einer Matrix und finde je eine Basis ihres Kerns und ihres Bildes.

12. Gegeben seien Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$. Welchen Rang kann die $n \times m$ Matrix $A := (a_i b_j)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ haben?

13. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$, beziehungsweise über $\mathbb{F}_2$.

14. Gegeben seien die beiden geordneten Basen $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_4)$ und $\mathcal{B}' := (w_1, \ldots, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$.

15. Gegeben sei eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

(i) $|a_{ii}| \geqslant 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und

(ii) $|a_{ij}| < \dfrac{1}{n-1}$ für alle $i \neq j$.

Zeige, dass A invertierbar ist.

16. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, die durch Linksmultiplikation mit der folgenden Matrix definiert ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to W$. Zeige, dass f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist genau dann, wenn die duale lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

18. Berechne die Determinante und, wenn möglich, die Inverse folgender Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 5 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

19. Berechne

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, 2^{a(\sigma)},$$

wobei $a(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ bezeichnet:

$$a(\sigma) = \#\big\{k \in \{1, \ldots, n\} \bigm| \sigma(k) = k\big\}.$$

(*Hinweis:* Die Summe ist die Determinante einer gewissen $n \times n$-Matrix.)

20. Zeige: Für jede $m \times n$ Matrix A und für jede $n \times m$ Matrix B gilt:

$$\det(I_m + A \cdot B) \;=\; \det(I_n + B \cdot A).$$

(*Hinweis:* Zerlege die $(m+n) \times (m+n)$-Blockmatrix $M := \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ als Produkt $M = M_1 \cdot M_2$ von Blockdreiecksmatrizen M_1, M_2 auf zwei verschiedene Arten und berechne die Determinante.)

21. Sei K ein Körper, welcher ein Element $a \in K$ mit $a^3 = 1$ und $a \neq 1$, enthält. Zeige, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

22. Entscheide, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Sei A eine quadratische Matrix. Zeige, dass A und A^T dieselben Eigenwerte mit denselben arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten besitzen.

24. Seien Folgen $(a_i)_{i\geqslant 0}, (b_i)_{i\geqslant 0}, (c_i)_{i\geqslant 0}$ in $\mathbb{Q}$ definiert durch die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} a_{i+1} &:= a_i - 3b_i + 3c_i, \\ b_{i+1} &:= -2a_i + 2c_i, \\ c_{i+1} &:= a_i - b_i + 3c_i \end{aligned}$$

für alle $i \geqslant 0$, und die Anfangsbedingungen

$$a_0 := 1, \quad b_0 := 2 \quad \text{und} \quad c_0 := 1\,.$$

Bestimme explizite Lösungsformeln für a_i, b_i, c_i.

*25. Ein *stochastischer Vektor* ist ein Spaltenvektor mit Einträgen in $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und Summe aller Einträge 1. Eine *stochastische* oder *Markov-Matrix* ist eine quadratische Matrix, deren Spalten stochastische Vektoren sind. Sei A eine stochastische $n \times n$-Matrix mit $n > 0$. Zeige:

(a) Für jeden stochastischen Vektor v ist auch Av ein stochastischer Vektor.

(b) Jeder komplexe Eigenwert λ von A hat Absolutbetrag $|\lambda| \leqslant 1$.

(c) Die Zahl 1 ist ein Eigenwert von A.

Seien nun alle Einträge von A positiv. Zeige:

(d) Der Eigenwert 1 hat geometrische Multiplizität 1.

(e) Der Eigenwert 1 hat arithmetische Multiplizität 1.

(f) Alle komplexen Eigenwerte $\lambda \neq 1$ haben Absolutbetrag $|\lambda| < 1$.

(g) Es existiert genau ein stochastischer Vektor v_1 mit $Av_1 = v_1$.

(h) Für jeden stochastischen Vektor v gilt $A^m v \to v_1$ für $m \to \infty$.

(*Hinweis:* Für (e) und (h) nehme vorläufig an, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist. Beweise den allgemeinen Fall, nachdem die Jordan-Normalform behandelt wurde.)

*26. Gegeben sei ein diskretes dynamisches System mit n Zuständen, bei dem in jedem Zeitschritt der Zustand j mit der Wahrscheinlichkeit a_{ij} in den Zustand i übergeht, und die Übergänge zu verschiedenen Zeiten alle voneinander unabhängig sind. Dann ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine Markovmatrix, das heisst, eine quadratische Matrix mit reellen Koeffizenten $\geqslant 0$ und jeder Spaltensumme gleich 1. Zur Zeit 0 habe der Zustand i die Wahrscheilnichkeit v_i. Mit dem Spaltenvektor $v := (v_i)$ sind dann die Wahrscheinlichkeiten der Zustände zur Zeit m die Einträge des Vektors $A^m v$. Gefragt ist, wie sich das System für $m \to \infty$ entwickelt.

Im Jahr 2014 waren an der ETH Zürich 18178, an der Universität Zürich 25715 und an der EPFL Lausanne 9666 Studenten eingeschrieben. Wir nehmen hypothetisch das folgende an: Während jedes Jahres wechseln 1/8 der ETH Studenten zur

UZH und 1/8 zur EPFL. Von der UZH wechseln jedes Jahr 1/3 der Studenten zur ETH und 1/3 zur EPFL. Von der EPFL wechseln jedes Jahr 1/4 der Studenten zur ETH und 1/8 zur UZH. Alle übrigen Studenten bleiben an ihrer Heimatuniversität. Wir nehmen weiter an, dass die Gesamtanzahl Studierender gleichbleibt und die Studentenschaft sich in gleichem Masse erneuert (gleiche Anzahl Aus- und Eintritte).

(a) Bestimme die Markov-Übergangsmatrix zu diesem System.

(b) Bestimme die Studentenanteile und die Zahl der Studenten der drei Universitäten im Jahr 2114.

(c) Schätze die Anteile nach Ablauf des Jahrs 3014 möglichst genau, wenn die Anteile im Jahr 2014 unbekannt sind.

*27. (a) Beweise das Bruhat-Lemma: Für je zwei Fahnen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V existiert eine Basis von V, so dass jeder Teilraum in $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ von einer Teilmenge der Basis erzeugt wird.

(b) Folgere daraus die Bruhat-Zerlegung: Jede invertierbare quadratische Matrix A lässt sich schreiben als $A = BWB'$ mit oberen Dreiecksmatrizen B und B' sowie einer Permutationsmatrix W.

28. Zeige durch Kopfrechnen, dass die folgende reelle Matrix invertierbar ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2015 & 2344 & 1234 & 1990 \\ 2124 & 4123 & 1990 & 3026 \\ 1230 & 2014 & 9095 & 1230 \\ 1262 & 1776 & 1880 & 3907 \end{pmatrix}$$

29. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $L_A|_U = \mathrm{id}_U$ und $L_A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $L_A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

30. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$ Vektoren in V, sodass für alle i, j gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle.$$

Zeige, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ existiert mit $f(v_i) = w_i$ für alle i.

31. (*Hermitesche Polynome*) Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome in einer Variablen x, und betrachte die Endomorphismen

$$\begin{aligned} D&: \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Du := u_x := \tfrac{du}{dx}, \\ P&: \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Pu := -u_x + xu, \\ L&: \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Lu := -u_{xx} + xu_x. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass

$$(u, v) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} v(x) e^{-x^2/2}\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[x]$ definiert.

(b) Zeige, dass P zu D adjungiert ist bezüglich $(\cdot, \cdot)$.

(c) Zeige, dass L selbstadjungiert ist bezüglich $(\cdot, \cdot)$.

(d) Zeige: Für jeden Eigenvektor u von L ist auch Pu ein Eigenvektor. (Deshalb heisst P auch *Erzeugungs-Operator* für L.)

(e) Zeige, dass für jede natürliche Zahl n ein eindeutiges normiertes Polynom h_n vom Grad n existiert, welches ein Eigenvektor von L ist. Dieses heisst das *n-te Hermitesche Polynom*.

(f) Zeige für alle n die Formel

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

(g) Berechne die Skalarprodukte (h_n, h_m) für alle $n, m \geqslant 0$. (*Hinweis:* Verwende das Gauss-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.)

Bemerkung: Die Hermiteschen Polynome sind wichtig für Anwendungen in der Physik. Sie tauchen zum Beispiel in der quantenmechanischen Beschreibung des harmonischen Oszillators auf, siehe:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)`

32. Sei M die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis der quadratischen Form

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Zeige, dass M positiv definit ist und berechne ihre Cholesky-Zerlegung.

33. Sei A eine positiv-definite reelle symmetrische $n \times n$-Matrix.

(a) Ist A^2 positiv definit?

(b) Ist A^{-1} positiv definit?

34. Zeige, dass jede symmetrische komplexe Matrix mit positiv definitem Realteil invertierbar ist.

35. Sei $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ und betrachte die reelle 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat.

*36. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $0 < n < \infty$, und sei $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit Eigenwerten $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Zeige:

$$\lambda_1 = \min\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, 0 \neq x \in V \right\},$$
$$\lambda_n = \max\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, 0 \neq x \in V \right\}.$$

Zeige allgemeiner das Min-Max-Prinzip: Für jedes $r = 1, \ldots, n$ gilt

$$\lambda_r = \min\left\{ \max_{x \in W \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right) \,\middle|\, W \subseteq V,\ \dim W = r \right\}.$$

37. Seien V ein reeller Vektorraum der Dimension n und β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V mit der Signatur (p, q). Bestimme die maximale Dimension eines Unterraums $U \subset V$ mit $\beta|_{U \times U} = 0$.

*38. Der *Index* einer reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ der jeweiligen Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$ ist definiert als

$$\operatorname{Ind}(A) := \sum_{i:\, \lambda_i > 0} m_i - \sum_{i:\, \lambda_i < 0} m_i,$$

also als die Anzahl positiver minus die Anzahl negativer Eigenwerte von A, gezählt mit Vielfachheiten.

Seien A und B zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen mit

$$x^T A x \leqslant x^T B x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathrm{Ind}(A) \leqslant \mathrm{Ind}(B)$ ist.

39. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

    (a) Zeige oder widerlege: Für jeden invertierbaren Endomorphismus $f \colon V \to V$ existiert ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V, für welches f orthogonal ist.

    (b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $f = L_A$ mit

    $$A := \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

    Finde, falls möglich, eine 3×3-Matrix M, sodass $(x, y) \mapsto x^T M y$ ein Skalarprodukt auf V ist, bezüglich das der Endomorphismus L_A orthogonal ist.

40. Seien $R, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zwei nicht-triviale Drehungen um je eine Gerade durch den Ursprung. Beweise die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

    (a) R und S kommutieren, das heisst, es gilt $RS = SR$.

    (b) R und S haben entweder dieselbe Drehachse oder sind Rotationen um $180°$ bezüglich orthogonaler Drehachsen.

41. Sei f ein Automorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Zeige: Ist f selbstadjungiert, bzw. unitär, bzw. normal, so haben f^* und f^{-1} dieselbe Eigenschaft.

42. Sei V der euklidische Raum der reellen 2×2-Matrizen mit dem Skalarprodukt

    $$\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^T B).$$

    Für $u \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $F_u : V \to V$ definiert durch

    $$F_u(A) := A^T - u \cdot (\mathrm{Spur} A) \cdot I_2$$

    (a) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u selbstadjungiert?

    (b) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u orthogonal?

    (c) Sei $u \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass F_u sowohl selbstadjungiert als auch orthogonal ist. Welche Abbildung ist dann $F_u \circ F_u$?

43. Beweise oder widerlege: Jeder normale Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums ist die Komposition eines selbstadjungierten mit einem unitären Endomorphismus.

44. Wir betrachten ein korrekt ausgefülltes Sudokugitter als eine 9×9 Matrix S mit Einträgen in $\{1, 2, \ldots, 9\} \subset \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind für alle, für manche, für kein S korrekt?

   (a) Die Zahl 45 ist ein Eigenwert von S.

   (b) Die Determinante von S ist durch 9 teilbar.

   (c) Der Vektor $(1, \ldots, 9)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von S.

   *(d) Die Determinante von S ist positiv.

45. Für welche reellen Zahlen a und b existiert eine reelle 2×2-Matrix A mit

$$A^{20} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}?$$

46. Für welche der folgenden Gleichungen existiert eine reelle Matrix X, die sie erfüllt?

   (a) $X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $2X^5 + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $X^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

47. Was sind die Möglichkeiten für den Rang einer reellen 7×7-Matrix mit Minimalpolynom X^2?

48. Sei K ein Körper. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, so dass die Jordan-Normalform jedes Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums durch das charakteristische Polynom zusammen mit dem Minimalpolynom eindeutig bestimmt ist.

49. Wir betrachten alle reellen symmetrischen $3{\times}3$-Matrizen, welche die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektoren besitzen.

(a) Was lässt sich über die Eigenwerte λ_i zu v_i aussagen?

(b) Gib eine Parametrisierung der Menge aller dieser Matrizen.

*50. Zeige: Für jede nilpotente $n \times n$-Matrix N über K ist $\exp(N)$ ähnlich zu $I_n + N$.

*51. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix über K und betrachte den Unterraum

$$U(A) := \{B \in \mathrm{Mat}_{nn}(K) : AB = BA\}.$$

(a) Finde eine Basis von $U(A)$ für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Zeige: $n \leqslant \dim U(A) \leqslant n^2$.

(c) In welchen Fällen gilt Gleichheit in (b)?

52. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle den Betrag < 1 haben. Beweise, dass die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist und berechne ihre Inverse.

53. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Jordansche Normalform von A und von B, sowie zugehörige Jordan-Basen von $\mathbb{R}^5$.

*54. Seien f und g Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass die Endomorphismen fg und gf dasselbe charakteristische Polynom haben.

*55. Sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass gilt

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle v, w\rangle = 0 \implies \langle T(v), T(w)\rangle = 0\,.$$

Zeige, dass eine unitäre Abbildung $S : V \to V$ und $c \in \mathbb{C}$ existieren mit $T = c \cdot S$.

Hinweis: Untersuche den Endomorphismus $f := T^* \circ T$.

*56. Eine *reelle homogene Form vom Grad d* in n Variablen ist ein Ausdruck der Form

$$q(x) \;=\; \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geqslant 0\\ \sum_\nu i_\nu = d}} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und reellen Koeffizienten $a_{i_1,\dots,i_n}$. Die Menge all dieser ist ein reeller Vektorraum $V_{d,n}$. Zeige, dass die *Restitutions-Abbildung*

$$\mathrm{Res}\colon\ \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to V_{d,n},\ \ \varphi \mapsto q_\varphi(x) := \varphi(x, \dots, x).$$

ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Untersuche die *Polarisations-Abbildung*

$$\mathrm{Pol}\colon V_{d,n} \to \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ \ q(x) \mapsto \varphi_q$$

mit

$$\varphi_q(v_1, \dots, v_d) \;:=\; \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} q(t_1 v_1 + \cdots + t_d v_d)$$

für alle $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^n$ und für reelle Variablen $t_1, \dots, t_d$.

57. Betrachte zwei K-Vektorräume V, W sowie einen Unterraum $V' \subset V$.

(a) Konstruiere einen natürlichen injektiven Homomorphismus

$$V' \otimes_K W \;\hookrightarrow V \otimes_K W.$$

Identifiziere $V' \otimes_K W$ mit seinem Bild.

(b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus

$$(V \otimes_K W)/(V' \otimes_K W) \;\cong\; (V/V') \otimes_K W.$$

*58. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Element von $\bigwedge^p V$ der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ für Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$ heisst *rein.* Betrachte ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\alpha \in \bigwedge^p V$. Zeige: Der Kern der Abbildung

$$f_\alpha\colon V \to \bigwedge\nolimits^{p+1} V,\ \ v \mapsto v \wedge \alpha$$

hat Dimension $\leqslant p$, und es gilt Gleichheit genau dann, wenn α rein ist.

59. Betrachte eine 4×2-Matrix $M = (m_{ij})_{1\leqslant i \leqslant 4,\, 1 \leqslant j \leqslant 2}$ und bezeichne ihre 2×2-Minoren mit $M_{ij} := \det \left(\begin{smallmatrix} m_{i1} & m_{i2} \\ m_{j1} & m_{j2} \end{smallmatrix}\right)$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

Existiert eine reelle 4×2-Matrix M mit $(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})$ gleich

(a) $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$?

(b) $(3, 4, 5, 6, 7, 8)$?

(c) $(1, 5, 3, 3, 2, 1)$?

(*Hinweis:* Rechne in $\Lambda^2\mathbb{R}^4$!)

60. Zeige: Für je zwei K-Vektorräume V und W und für jedes $k \geqslant 0$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\boxplus_{i+j=k} \Big(\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \Big) \;\cong\; \bigwedge^k (V \boxplus W)\,.$$