LINEARE ALGEBRA

SARAH ZERBES

Varia. Kurs Webseite: https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-1151-00L/

Empfohlene Buecher und Skripte: siehe Webseite

Fragen und Korrekturen zum Skript: https://forum.math.ethz.ch/c/autumn-24/lineare-algebra-mavt-matl/189

Haupt-Assistent fuer LA1: Tim Gehrunger (tim.gehrunger@math.ethz.ch)

Diese Skript basiert zum Teil auf dem Skript von Menny Akka Genosar
(siehe https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-1151-00L/)

Das Skript wird nach jeder Vorlesung auf die Webseite hochgeladen.

Contents

Varia 1
1. Einfuehrung 1
1.1. Motivation: Fibonacci Folgen 1
1.2. Mengenlehre 5
1.3. Funktionen 7
2. Matrizen und lineare Gleichungssysteme 9
2.1. Körper 9
2.2. Matrizen 11
2.3. Elementare Zeilenoperationen 14
2.4. Lineare Gleichungssysteme 17
3. Vektorraeume 20
3.1. Definition und Beispiele 20
3.2. Unterräume 22
3.3. Basen von Vektorraeumen 25
3.4. Basen von Unterraeumen 31
3.5. Zusammenfassung der Rechenmethoden 34
3.6. Zeilen und Spaltenraeume 35
4. Lineare Abbildungen 37
4.1. Definition und Beispiele 37
4.2. Kernel and Image 40
4.3. Lineare Abbildungen als Matrizen 44
4.4. Matrizen als Lineare Abbildungen 46
4.5. Basiswechsel 47
4.6. Eine Bemerkung zu Koordinaten 50
4.7. Zeilenrang gleich Spaltenrang 51
4.8. Zurueck zu linearen Gleichungssystemen 54
5. Intermezzo: Gruppen und Ringe 57
5.1. Gruppen 57
5.2. Ringe 59
6. Vektorraeume linearer Abbildungen 60
6.1. Definition und erste Eigenschaften 60
6.2. Der duale Vektorraum 62

Lecture 1

1.1. **Motivation: Fibonacci Folgen.** In diesem Kapitel moechte ich Ihnen eine sehr schoene Anwendung der linearen Algebra zeigen, als Motivation fuer die Stukturen, die wie in diesem Kurs untersuchen werden.

Machen Sie sich keine Sorgen, wenn Sie in diesem Kapitel nicht alles verstehen; alle diese Strukturen werden wir in den naechsten Monaten genau untersuchen und dabei immer wieder auf dieses Beispiel zurueckkommen.

Definition 1.1.1. *Die Fibonacci Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ is definiert durch dir Rekursion*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \textit{for } n \geq 2$$

Beachte 1.1.2. *Die ersten Elemente der Folge sind*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Frage: Koennen wir a_n bestimmen, ohne vorher alle Elemente bis a_{n-1} zu bestimmen?

Definition 1.1.3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere die Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ mittels der Rekursion*

$$a_0 = a, \quad a_1 = b,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \textit{for } n \geq 2$$

Eine Folge $\mathcal{A}$ ist eine Fibonacci Folge wenn $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{a,b}$ für $a, b, \in \mathbb{R}$. Es sei V die Menge aller solcher Folgen, d.h.

$$V = \{\mathcal{F}_{a,b} \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel 1.1.4. (1) Die Folge aus Definition 1.1.1 ist gleich der Folge $\mathcal{F}_{0,1}$.

(2) Fuer $a = -2$ und $b = 2$ erhalten wir die Folge

$$\mathcal{F}_{-2,2} = (-2, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 10, \ldots)$$

(3) Fuer $a = -1$ und $b = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\mathcal{F}_{-1,\frac{1}{2}} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -4, \ldots\right)$$

Definition 1.1.5. *Es seien $\mathcal{F} = (a_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{G} = (b_n)_{n\geq 0} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(1) Wir definieren die Summe von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ als die Folge

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = (a_n + b_n)_{n\geq 0}.$$

(2) Wir definieren das Skalarprodukt von $\mathcal{F}$ und α als die Folge

$$\alpha \cdot \mathcal{F} = (\alpha \cdot a_n)_{n\geq 0}.$$

Satz 1.1.6.

(1) Es seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in V$. Dann gilt $\mathcal{F} + \mathcal{G} \in V$.
(2) Es sei $\mathcal{F} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha \cdot \mathcal{F} \in V$.

Wir sagen: V hat die Struktur eines Vektorraums über $\mathbb{R}$.

Proof. (1) Wir schreiben $\mathcal{F} = (a_n)_{n\geq 0}$ und $\mathcal{G} = (b_n)_{n\geq 0}$, und es sei $c_n = a_n + b_n$. Wir muessen zeigen, dass

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

fuer all $n \geq 2$. Aber

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + b_n \\ &= a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} \\ &= (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= c_{n-1} + c_{n-2}. \end{aligned}$$

(2) kann durch ähnliche Argumentation bewiesen werden. □

Beachte 1.1.7. *Der Beweis von Satz 1.1.6 zeigt, dass folgendes gilt:*

$$\mathcal{F}_{a,b} + \mathcal{F}_{c,d} = \mathcal{F}_{a+c,b+d}$$
$$\alpha \cdot \mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}.$$

Übung 1.1.8. *Zeigen Sie, dass die Menge* $\{\mathcal{F}_{\alpha a,\alpha b} : \alpha \in \mathbb{R}\} \subset V$ *unter der Annahme* $(a,b) \neq (0,0)$ *unendlich viele Elemente enthaelt, aber trotzdem nicht gleich* V *ist.*

Satz 1.1.9. *Sei* $\mathcal{F} \in V$*. Dann gibt es* $a, b \in \mathbb{R}$ *so dass*

$$\mathcal{F} = a \cdot \mathcal{F}_{1,0} + b \cdot \mathcal{F}_{0,1}. \tag{1}$$

Wir sagen: die Gleichung (13) schreibt $\mathcal{F}$ als eine *Linearkombination* der Folgen $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$.

Proof. Aufgrund der Definition von V gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{a,b}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$\mathcal{F}_{a,b} = a\mathcal{F}_{1,0} + b\mathcal{F}_{0,1}.$$

□

Übung 1.1.10. *Sei* $\mathcal{F} \in V$*. Dann gibt es Elemente* $c, d \in \mathbb{R}$ *so dass*

$$\mathcal{F} = c \cdot \mathcal{F}_{1,1} + d \cdot \mathcal{F}_{1,-1}.$$

Wir wollen nun die Symmetrien des Raumes V betrachten. Unter einer Symmetrie verstehen wir einen Abbildung $T : V \to V$, die die Struktur von V respektiert.

Definition 1.1.11. *Eine Abbildung* $T : V \to V$ *ist eine Symmetrie von* V*, wenn für alle* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in V$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt, dass*

$$T(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = T(\mathcal{F}) + T(\mathcal{G}) \qquad \text{und} \qquad T(\alpha \cdot \mathcal{F}) = \alpha \cdot T(\mathcal{F}).$$

Wir sagen: T ist eine lineare Abbildung.

Beispiele 1.1.12.

(1) Die Identitäts-Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : V &\to V, \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(2) Für $\alpha \in \mathbb{R}$, definiere

$$\begin{aligned} T_\alpha : V &\to V, \\ \mathcal{F} &\mapsto \alpha \cdot \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Übung 1.1.13. *Sei* $\mathcal{G} \in V$*, und definiere die Abbildung*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G}} : V &\to V, \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F} + \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $M_{\mathcal{G}}$ *nur dann eine Symmetrie von* V *ist, wenn* $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{0,0}$.

Lemma 1.1.14. *Sei* $\mathcal{F} = (a_0, a_1, \dots) \in V$*. Dann ist die Folge* $(a_1, a_2, \dots)$ *ebenfalls in* V*.*

Proof. For $n \geq 0$ sei $b_n = a_{n+1}$; wir muessen zeigen, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ ein Element von V ist. Für $n \geq 2$ gilt

$$b_n = a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

da $(a_n)_{n\geq 0} \in V$. Aber $a_n + a_{n-1} = b_{n-1} + b_{n-2}$, d.h.

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

□

Satz 1.1.15. *Definiere die* Verschiebungs-Abbildung[1]

$$\begin{aligned} S : V &\to V, \\ (a_0, a_1, \dots) &\mapsto (a_1, a_2, \dots). \end{aligned}$$

Dann ist S *eine Symmetrie von* V*.*

Proof. Explizite Rechnung zeigt, dass S die Bedingungen von Definition 1.1.11 erfuellt. □

Beispiel 1.1.16. Es gilt

$$\begin{aligned} S(\mathcal{F}_{-2,2}) &= (2, 0, 2, 2, 4, 6, 10, \dots) \\ &= \mathcal{F}_{0,2}. \end{aligned}$$

[1]Es ist klar, dass $S(\mathcal{G}) \in V$ ist fuer jede Fibonacci Folge $\mathcal{G} \in V$.

Definition 1.1.17. *Set $T : V \to V$ eine Symmetrie. Eine Folge $\mathcal{F} \in V$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ ist eine* Eigenfolge *wenn es ein Element $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt so dass*

$$T(\mathcal{F}) = \alpha \cdot \mathcal{F}.$$

In diesem Fall heisst α der Eigenwert *der Folge $\mathcal{F}$.*

Beispiele 1.1.18.

(1) Alle $\mathcal{F} \in V$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ sind Eigenfolgen der Identitätsabbildung mit Eigenwert 1.
(2) Alle $\mathcal{F} \in V$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ sind Eigenfolgen der Abbildung T_α mit Eigenwert α.

Theorem 1.1.19. *Es seinen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dann sind $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ und $\mathcal{F}_{1,\psi}$ Eigenfolgen der Abbildung S, mit jeweiligen Eigenwerten φ und ψ. Mit anderen Worten, es gilt*

$$\mathcal{F}_{1,\varphi} = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots), \tag{2}$$

$$\mathcal{F}_{1,\psi} = (1, \psi, \psi^2, \psi^3, \dots). \tag{3}$$

Weiterhin gilt: wenn $\mathcal{A}$ eine Eigenfolge von S ist, dann gibt es ein Element $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ so dass entweder $\mathcal{A} = \beta \cdot \mathcal{F}_{1,\varphi}$ oder $\mathcal{A} = \beta \cdot \mathcal{F}_{1,\psi}$.

Proof. Nimm an, dass $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots)$ eine Eigenfolge von S ist, mit Eigenwert α. Dann gilt

$$(a_1, a_2, a_3 \dots) = (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots),$$

d.h. $a_n = \alpha \cdot a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Mit anderen Worten, $\mathcal{A}$ ist eine geometrische Folge:

$$\mathcal{A} = (a_0, a_0\alpha, a_0\alpha^2, \dots).$$

Da $\mathcal{A} \neq \mathcal{F}_{0,0}$, gilt $a_0 \neq 0$.

Nun ist $\mathcal{A}$ ein Element von V, d.h. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} & a_2 = a_1 + a_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_0\alpha^2 = a_0\alpha + a_0 \\ \Rightarrow \quad & \alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind φ und ψ, d.h entweder $\mathcal{A} = a_0 \cdot (1, \varphi, \varphi^2, \dots)$ oder $\mathcal{A} = a_0 \cdot (1, \psi, \psi^2, \dots)$. □

Übung 1.1.20. *Zeigen Sie, dass*

$$\frac{1}{\varphi - \psi} \cdot \mathcal{F}_{1,\varphi} + \frac{1}{\psi - \varphi} \cdot \mathcal{F}_{1,\psi} = \mathcal{F}_{0,1}. \tag{4}$$

Korollar 1.1.21. *Sei $\mathcal{F}_{0,1} = (a_0, a_1, \dots)$. Dann gilt*

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Wir nennen dies eine geschlossene Form *der Folge.*

Proof. Der $n$te Eintrag der Folge $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ (bzw. der Folge $\mathcal{F}_{1,\psi}$)) ist laut (3) (bzw. (3)) gegeben durch φ^n (bzw. durch ψ^2). Es folgt daher von (4), dass

$$a_n = \frac{\varphi^n}{\varphi - \psi} + \frac{\psi^n}{\psi - \varphi}.$$

Indem wir die Werte von φ und ψ einsetzen, erhalten wir die Formel. □

Wir sehen also, dass wir die Betrachung des reellen Vektorraums V und seiner Symmetries einige sehr interessante (und konkrete) Saetze ueber Fibonacci-Folgen beweisen koennen. Wir werden diesem Phaenomen in diesem Kurs haeufig begegnen: durch sehr abstrakte Argumente erhalten wir informationen ueber sehr konkrete mathematische Objekte. Andererseits sind die abstrakten Strukturen oft von sehr konkreten Objekten inspiriert: der Informationsfluss zwischen konkreten und abstrakten Strukturen geht also in beide Richtungen.

1.2. **Mengenlehre.**

Definition 1.2.1. *Eine* Menge *ist eine Sammlung von Objekten. Die Objekte heissen die* Elemente *dieser Menge. Wenn x ein Element von M ist, schreiben wir $x \in M$. Wenn y kein Element von M ist, schreiben wir $y \notin M$.*

Beispiele 1.2.2.
(1) $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.
(2) $M = \{1, 13, -27\} = \{-27, 1, 13\}$ ist eine Menge mit drei Elementen.
(3) $N = \{\text{Mathematikstudenten mit langen Haaren}\}$ ist eine Menge.
(4) $P = \{1, 1, 1\} = \{1\}$ ist eine Menge mit einem Element.
(5) Die *leere Menge* ist die Menge, die keine Elemente enthaelt: $\emptyset = \{\,\}$.

Beachte 1.2.3.
(1) Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge wie die Elemente einer Menge aufzaehlen.[2]
(2) Wiederholungen von Elementen in einer Menge werden ignoriert: jedes Element kommt nur einmal vor.
(3) Auch Mengen selber koennen Elemente von Mengen sein.
(4) Eine Menge muss nicht unbedingt Elemente der gleichen Art enthalten: auch

$$M = \{0, 1, \textit{Ehringer Kuehe}\}$$

ist eine Menge.

Beispiel 1.2.4.
(1) $M = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{-1, 0\}\}$ ist die Menge, die als Objekte die Mengen $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{-1, 0\}$ enthaelt.
(2) $N = \{\emptyset\}$ ist die Menge, die als einziges Element die leere Menge enthaelt.

Manchmal koennen wir die Elemente einer Menge mit Hilfe einer Eigenschaft angeben: Lecture 2

Definition 1.2.5. *$M = \{x : A(x)\}$ (manchmal auch geschrieben $\{x|\, A(x)\}$) ist die Menge aller x mit einer bestimmen Eigenschaft.*

Beispiel 1.2.6. $M = \{x : x \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad x^2 < 9\}$ ist die Menge $M = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Definition 1.2.7. *Es seien P und Q Mengen.*
(1) P ist eine Unter- oder Teilmenge von Q, geschrieben $P \subseteq Q$, wenn fuer alle $x \in P$ gilt: $x \in Q$.
(2) P ist eine strikte Unter- oder Teilmenge von Q, geschrieben $P \subsetneq Q$, wenn $P \subseteq Q$ und $P \neq Q$.
(3) Wir schreiben $P \not\subseteq Q$, wenn P keine Teilmenge von Q ist.

Beispiel 1.2.8. (1) Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen. Dann gilt $\mathcal{P} \subsetneq \mathbb{Z}$.
(2) Es sei $\mathbb{Q}_+$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen. Dann gilt $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q}_+$.
(3) Die leere Menge ist eine Teilmenge von jeder Menge.
(4) Es sei $M = \{1, \{1, 2\}\}$. Die Teilmengen von M sind

$$\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{\{1, 2\}\}, \quad M.$$

Übung 1.2.9. *Finden Sie alle Teilmengen folgender Mengen: $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1, 2, 3\}$. Faellt Ihnen etwas auf?*

Wenn wir mehrere Mengen haben, dann koennen wir aus ihnen neue Mengen konstruieren:

Definition 1.2.10. *Es seien P, Q Mengen. Wir definieren*
(1) die Schnittmenge $P \cap Q = \{x|\, x \in P \quad \text{und} \quad x \in Q\}$;
(2) die Vereinigungsmenge $P \cup Q\{x|\, x \in P \quad \text{oder} \quad x \in Q\}$;
(3) P ohne Q: $P - Q = \{x|\, x \in P \quad \text{und} \quad x \notin Q\}$.

Wenn Q eine Teilmenge von P ist, dann nennen wir P one Q das Komplement *von Q (in P), geschrieben Q^c.*

Beispiel 1.2.11. (1) Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen und Q die Menge aller Quadratzahlen. Dann gilt $\mathcal{P} \cap Q = \emptyset$.

[2] Wenn die Reihenfolge doch eine Rolle spielen soll, dann betrachten wir *geordnete Mengen.*

(2) Es sei M die Menge aller Professoren an der ETH und N die Teilmenge aller Professoren ohne Haare. Dann ist $N^c = M - N$ die Menge aller Professoren an der ETH mit mindestens einem Haar.
(3) Fuer jede Menge M gilt $M - \emptyset = M$.

Wir koennen auch Schnitt- und Vereinigungsmengen von (moeglicherweise unendlichen) Familien (d.h Mengen) von Mengen bilden:

Definition 1.2.12. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Dann ist*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \textit{ es gibt } A \in \mathcal{A} \textit{ so dass } x \in A\};$$
$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \textit{ fuer alle } A \in \mathcal{A}\}.$$

Beispiel 1.2.13. Fuer $n \in \mathbf{N}$ sei

$$A_n = \{x \in \mathbf{Z} : x > 0 \text{ und } x \text{ ist das Produkt von genau } n \text{ Primfaktoren}\}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_n A_n = \mathbb{Z} - \{1\} \quad \text{und} \quad \bigcap_n A_n = \emptyset.$$

Definition 1.2.14. *Es seien X, Y zwei Mengen. Das* Cartesische Produkt *von X und Y ist die Menge aller geordneten Paar (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$:*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\, y \in Y\}.$$

Beispiel 1.2.15. (1) Es sei $X = \{-1, 0, 1\}$ und $Y = \{3, 5\}$. Dann ist

$$X \times Y = \{(-1, 3), (0, 3), (1, 3), (-1, 5), (0, 5), (1, 5)\}.$$

(2) Es sei $X = [0, 2]$ und $Y = (1, 2]$. Dann ist

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in [0, 2],\, y \in (1, 2]\}.$$

Definition 1.2.16. *Es sei X eine Menge. Das n-fache Cartesische Produkt von X ist die Menge*

$$X^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

1.3. **Funktionen.**

Definition 1.3.1. *Es seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ ist eine Relation, die* jedem *Element $x \in X$* genau ein *Element $f(x) \in Y$ zuordnet; wir schreiben*[3] $x \mapsto f(x)$. *Wir nennen X die* Definitionsmenge *und Y die* Zielmenge *der Funktion.*

Beispiel 1.3.2. (1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ ist eine Funktion.

(2) $g : \mathbb{Z} \to \{\pm 1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$ ist keine Funktion.[4]

(3) $g : \mathbb{Z} \to \{\pm 1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$ ist eine Funktion.

(4) $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$ ist die *Identitaetsfunktion von X.*

(5) Es sei $Y \subseteq X$. Die charakteristische Funktion von Y ist die Funktion

$$\mathrm{char}_Y : X \to \{0, 1\},$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in Y \\ 0 & \text{wenn } x \notin Y \end{cases}$$

(6) Addition (bzw. Multiplikation) ist eine Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.3.3. *Zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : x' \to Y'$ sind genau dann gleich, wenn $X = X'$, $Y = Y'$ und $f(x) = g(x)$ fuer alle $x \in X$.*

Definition 1.3.4. *Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$. Die* Beschraenkung von f auf A *ist die Funktion*

$$f|_A : A \to Y, \quad f|_A(x) = f(x) \quad \textit{fuer } x \in A.$$

Definition 1.3.5. *Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(1) f ist injektiv wenn fuer alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.
(2) f ist surjektiv wenn fuer alle $y \in Y$ es mindestens ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$.
(3) f ist bijektiv wenn f injektiv und surjektiv ist; mit anderen Worten, fuer alle $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$.

Beispiel 1.3.6. (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
(2) Die Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv.
(3) Die Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Definition 1.3.7. *Es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Die* inverse Funktion $f^{-1} : Y \to X$ *ist die Funktion, die einem Element $y \in Y$ das eindeutig bestimmte Element $x \in X$ zuordnet, fuer das gilt $f(x) = y$.*

Beispiel 1.3.8. Die inverse Funktion der Funtion h aus Beispiel 1.3.6 (3) ist gegeben durch

$$h^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Manchmal koennen Funktionen miteinander verknuepft werden:

Definition 1.3.9. *Es seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Die Komposition von f und g ist die Funktion*

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Beispiel 1.3.10. (1) Es sei $f : X \to Y$ bijektiv mit inverser Funktion $f^{-1} : Y \to X$. Dann gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y .$$

Bemerkung 1.3.11. *Es seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Dann ist $g \circ f$ definiert, aber $f \circ g$ ist nur dann definiert, wenn $Z = X$! Aber selbst dann ist es im Allgemeinen nicht wahr, dass $f \circ g = g \circ f$!*

Beispiel 1.3.12. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$. Dann gilt

$$g \circ f(x) = x^2 + 1 \quad \text{aber} \quad f \circ g(x) = (x+1)^2.$$

Satz 1.3.13. *Es seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen.*

(1) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

---

[3] Auf Vorschlag eines Studenten wird $\mapsto$ gesprochen als *Pfeil mit Fuss.*

[4] Warum nicht?

(2) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Proof. Uebung. □

Korollar 1.3.14. *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv.*

Lecture 3

2.1. **Körper.** Sie haben bereits gesehen, dass $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ aehnlich Strukturen haben: sie besitzen Addition und Multiplikation. Wir wollen diese Gemeinsamkeiten durch Axiome beschreiben:

Definition 2.1.1. *Ein* Koerper *(eng. field) ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Abbildungen (oder Verknuepfungen)*

$$+: K \times K \to K \qquad \text{(Addition)}$$
$$\cdot: K \times K \to K \qquad \text{(Multiplikation)}$$

und zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$, die folgende Eigenschaften erfuellen:

(1) *Assoziativitaet der Addition: $x + (y + z) = (x + y) + z$ fuer alle $x, y, z \in K$,*
(2) *Kommutativitaet der Addition: $x + y = y + x$ fuer alle $x, y \in K$,*
(3) *Neutrales Element der Addition: $0 + x = x$ fuer alle $x \in K$,*
(4) *Additives inverses Element: $\forall\, x \in K$ gibt es $x' \in K$, so dass $x + x' = 0$;*
(5) *Assoziativitaet der Multiplikation: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ fuer alle $x, y, z \in K$,*
(6) *Kommutativitaet der Multiplikation: $x \cdot y = y \cdot x$ fuer alle $x, y \in K$,*
(7) *Neutrales Element der Multiplikation: $1 \cdot x = x$ fuer alle $x \in K - \{0\}$,*
(8) *Multiplikatives inverses Element: $\forall\, x \in K - \{0\}$ gibt es ein $x' \in K$ so dass $x \cdot x' = 1$;*
(9) *Distributivitaet: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ fuer alle $x, y, z \in K$.*

Gibt es noch andere Koerper? Die Antwort ist ja: es gibt viele verschiedene Arten von Koerpern.

Übung 2.1.2. *Die Menge*

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen ist ein Koerper. Ebenso ist die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ein Koerper. Diese Arten von Koerpern heissen Zahlkoerper *(engl. number fields); sie sind sehr wichtig in der algebraischen Zahlentheorie.*

Eine weitere sehr interessante Klasse von Koerpern sind die Koerper mit endlich vielen Elementen.

Definition 2.1.3. *Es sei p eine Primzahl. Der Koerper $\mathbb{F}_p$ ist folgendermassen definiert: die Elemente sind $\{0, \dots, p-1\}$. For $x, y \in \mathbb{F}_p$ definieren wir $x + y \in \mathbb{F}_p$ (bzw. $xy \in \mathbb{F}_p$) as den Rest, der bei der Division durch p entsteht.*

Bemerkung 2.1.4. *Die einzige Schwerigkeit zu zeigen, dass $\mathbb{F}_p$ die Koerperaxiome erfuellt, ist die Existenz eines multiplikativen inversen Elements.*

Lemma 2.1.5. *Es sei $x \in \mathbb{F}_p$, $x \neq 0$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{F}_p$ so dass $xy = 1$; wir schreiben $y = x^{-1}$.*

Proof. Wir betrachten die Menge

$$M = \{1 \cdot x,\, 2 \cdot x, \dots, (p-1) \cdot x\}.$$

Behauptung 1. Keines der Element von M ist durch p teilbar.
Beweis von Behaptung 1. Offensichtlich, da p eine Primzahl ist.

Behauptung 2. Keine zwei Elemente von M haben den gleichen Rest bei Division durch p.
Beweis von Behauptung 2. Nimm an, dass $i \cdot x$ und $j \cdot x$ (mit $i \geq j$) den gleichen Rest bei der Division durch p haben. Dann ist $(i-j)x$ durch p teilbar, und da p eine Primzahl ist, bedeutet dies, dass $p|(i-j)$ oder $p|x$. Nun gilt aber

$$1 \leq i, j, x < p,$$

woraus wir folgern, dass $i = j$. Das beweist Behauptung 2.

Da die Menge M $p-1$ Elemente enthaelt, folgt aus Behauptung 2, dass es ein $1 \leq y < p$ gibt, so dass xy den Rest 1 bei der Division durch p hat. □

Satz 2.1.6. *$\mathbb{F}_p$ ist ein Koerper.*

Proof. Uebung. □

Beispiele 2.1.7.

(1) Die Additions- und Multiplikationstafeln von $\mathbb{F}_2$ sind gegeben durch

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

(2) Die Additions- und Multiplikationstafeln von $\mathbb{F}_3$ sind gegeben durch

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Bemerkung 2.1.8.

(1) Der Koerpers $\mathbb{F}_p$ kann mit Hilfe von modularem Rechnen / Kongruenzen *wesentlich eleganter definiert werden. Aber das gehoert in den Bereich der Zahlentheorie.*

(2) Es sei $n \geq 2$. Sie koennen dann natuerlich auch die Menge der Reste betrachten, die bei der Division durch n entstehen. Addition und Mutiplikation koennen wie in dem Fall, wenn n eine Primzahl ist, definiert werden; wenn n keine Primzahl ist, dann hat aber nicht jedes Element, das nicht null ist, ein multiplikatives inverses Element.

(3) Uebung fuer Ehrgeizige: es sei M die Menge der Reste, die bei der Division durch 10 *entstehen. Finden Sie heraus, welche Elemente von M ein mutliplikatives inverses Element besitzen. Was stellen Sie fest?*

Bemerkung 2.1.9. *Eine Menge R mit Operationen $+$ und $\cdot$, die alle Axiome aus Definition 2.1.1 ausser (8) erfuellen, nennt man einen* kommutativen Ring*; so ist z.B. $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring. Ebenso ist die Menge der Reste, die bei Division durch n entstehen, ein kommutativer Ring, der genau dann dann ein Koerper ist, wenn n eine Primzahl ist.*

2.2. **Matrizen.** Es sei K ein Körper.

Definition 2.2.1. *Seinem $m, n \geq 1$. Eine $(m \times n)$ Matrix A mit Werten in K ist eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten, deren Eintraege Elemente von K sind. Wir schreiben*

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

wobei a_{ij} den Eintrag in Reihe i und Spalte j bezeichnet. Die Matrix A ist quadratisch, wenn $m = n$ gilt.

Wir schreiben $M_{m \times n}(K)$ fuer die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen mit Werten in K.

Definition 2.2.2. *Eine $(1 \times n)$ Matrix wird als Zeilenvektor, eine $(m \times 1)$ Matrix als Spaltenvektor bezeichnet.*

Definition 2.2.3. *Wir schreiben $0_{m \times n}$ fuer die $(m \times n)$ Matrix, deren Werte alle Null sind.*

Wir schreiben $\mathbf{1}_n$ fuer die Matrix $(a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$, fuer die $a_{ii} = 1$ $\forall 1 \leq i \leq n$ und $a_{ij} = 0$ $\forall 0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ gilt.

Beispiel 2.2.4. Es ist $\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definition 2.2.5.

(1) *Seinen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $M_{m \times n}(K)$. Wir definieren die Summe $A + B$ als die $(m \times n)$ Matrix (c_{ij}) mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

(2) *Sei $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ und $\alpha \in K$. Dann ist das Skalarprodukt $\alpha \cdot A \in M_{m \times n}(K)$ als die Matrix mit Eintraegen (αa_{ij}) definiert.*

Lecture 4

Theorem 2.2.6. *Es seien $A, B, C \in M_{m \times n}(K)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann gilt* [5]

(1) *(Kommutativitaet) $A + B = B + A$*
(2) *(Assoziativitaet) $A + (B + C) = (A + B) + C$;*
(3) *$A + 0_{m+n} = 0_{m+n} + A = A$;*
(4) *$\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$;*
(5) *$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;*
(6) *$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.*

Proof. (1) Wir schreiben $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$. Dann ist

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B + A)_{ij}.$$

Die anderen Aussagen koennen aehnlich bewiesen werden. □

Die Multiplikation von zwei Matrizen ist komplizierter:

Definition 2.2.7. *Let $A \in M_{m \times n}(K)$ and $B \in M_{n \times p}(K)$. Dann ist das Produkt AB die $(m \times p)$-Matrix*[6] *$C = (c_{ik})$ mit*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Beispiele 2.2.8. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Theorem 2.2.9.

(1) *(Assoziativitaet) Seien $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times p}(K)$ und $C \in M_{p \times q}(K)$. Dann gilt*

$$A(BC) = (AB)C.$$

[5] In Kapitel 3 werden wir sehen, dass diese Eigenschaften genau die Vektorraumaxiome sind: $M_{m \times n}(K)$ sind ein K-Vektorraum.

[6] Wir werden in Kapitel 4 sehen, warum dies eine gute Definition ist: wenn man Matrizen als lineare Abbildungen interpraetiert, dann entspricht die Matrix Multiplikation der Verknuepfung von Abbildungen.

(2) (Distributivitaet 1) Seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$ und $C \in M_{n\times p}(K)$. Dann gilt

$$A(B+C) = AB + AC$$

(3) (Distributivitaet 2) Seien $A, B \in M_{m\times n}(K)$ und $C \in M_{n\times p}(K)$. Dann gilt

$$(A+B)C = AC + BC.$$

(4) Seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$ und $\alpha \in K$. Dann gilt

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Proof. Ueberpruefen Sie die Aussagen direkt von der Definition. □

Beachte 2.2.10. *Es seien $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times p}(K)$. Dann sind die beiden Produkte AB und BA dann und nur dann definiert, wenn $m = p$. In diesem Fall ist $AB \in M_{m\times m}(K)$ und $BA \in M_{n\times n}(K)$.*

Beispiele 2.2.11.

(i) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Es seien nun A wie in (i) und $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

aber CA ist nicht definiert.

Beispiel 2.2.12. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt

$$A\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n A = A.$$

Definition 2.2.13. *Es seinen A, B quadratische Matrizen. Dann* kommutieren *A und B, wenn $AB = BA$.*

Warnung 2.2.14. *Es sei $n \geq 2$. Dann gibt es viele Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$, die nicht kommutieren!*

Übung 2.2.15. *Sei $n \geq 2$. Finden Sie Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ so dass $AB \neq BA$.*

Definition 2.2.16. *Es sei $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$.*

(1) A ist diagonal *falls $a_{ij} = 0$ fuer all $i \neq j$.*
(2) A ist eine obere (untere) Dreiecksmatrix *falls $a_{ij} = 0$ fuer alle $i > j$ (bzw. $i < j$).*

Beispiel 2.2.17. Fuer all n ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ diagonal. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

Lemma 2.2.18. *Es seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ beide $\begin{cases} \textit{diagonal} \\ \textit{eine obere Dreiecksmatrix} \\ \textit{eine untere Dreiecksmatrix} \end{cases}$. Dann ist AB von der gleichen Form.*

Proof. Explizite Rechnung. □

Definition 2.2.19. *Eine $(n \times n)$-Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ist* invertierbar*, wenn es eine $(n \times n)$-Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass*[7]

(5) $$AB = BA = \mathbf{1}_n.$$

[7]Wir werden spaeter im Kurs sehen, dass es ausreicht, wenn $AB = \mathbf{1}_n$; die Gleichung $BA = \mathbf{1}_n$ haelt dann automatisch (und umgekehrt).

Lemma 2.2.20. *Wenn A invertierbar ist, dann gibt es genau ein B, dass Gleichung* (5) *erfuellt. Wir nennen B die* inverse Matrix von A*, und wir schreiben A^{-1}.*

Proof. Nehmen wir an, es gibt zwei $(n \times n)$-Matrizen B und B', die die Gleichung (5) erfuellen. Dann gilt

$$B = B\mathbf{1}_n = B(AB') = (BA)B' = \mathbf{1}_n B' = B'.$$

□

Beispiele 2.2.21.

(1) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ ist invertierbar, und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$ fuer einen beliebigen Koerper K ist nicht invertierbar.

(3) Warnung: Manchmal haengt es vom Grundkoerper ab, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht! Es sei $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$. Diese Matrix ist invertierbar fuer $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{Q}$, aber sie ist nicht invertierbar fuer $K = \mathbb{F}_3$.

Bemerkung 2.2.22.

(1) Wir werden uns spaeter im Kurs mit Fragen der Invertierbarkeit naeher beschaeftigen.

(2) Man kann zeigen: wenn A eine invertierbare diagonale bzw. obere/untere Dreiecksmatrix ist, dann ist A^{-1} von der gleichen Form.

Theorem 2.2.23. *Es seien A, B invertierbare $(n \times n)$ Matrizen. Dann gilt*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. Übung. □

Bemerkung 2.2.24. *Die Umkehrung der Faktoren kennen wir aus dem Alltag: wenn wir morgens erst Socken und dann Schuhe anziehen, so ziehen wir sie abends in umgekehrter Reihenfolge wieder aus.*[8]

[8]Diese Beobachtung stammt von Hermann Weyl.

2.3. **Elementare Zeilenoperationen.**

Definition 2.3.1. *Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Die elementaren Zeilenumformungen (EZU) auf A sind folgendermassen definiert:*

- $P(r,s)$ *fuer* $1 \leq r < s \leq m$*: Vertauschen der Zeilen r und s;*
- $M(r,\lambda)$ *fuer* $1 \leq r \leq m$ *und* $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$*: Multiplikation der Zeile r (d.h. aller Werte der Zeile r) mit λ;*
- $S(r,s,\lambda)$*: fuer* $1 \leq r,s \leq m$, $r \neq s$ *und* $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$*: Addition von $\lambda \times$ (Zeile r) zur Zeile s.*

Definition 2.3.2. *Wir sagen, dass zwei Matrizen A und A'* zeilen-aequivalent *sind, wenn wir A' durch die Anwendung von endlich vielen (EZU)s auf A erhalten.*

Beispiel 2.3.3. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(2,3) &\quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ M(1,-1) &\quad \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ S(2,1,2) &\quad \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.4. *Diese Definition ist symmetrisch in A und A': wenn wir A' durch die Anwendung von endlich vielen (EZU)s auf A erhalten, dann erhalten wir auch A' durch die Anwendung von endlich vielen (EZU)s auf A; mit anderen Worten, die (EZU)s sind* umkehrbar. *Zeigen Sie das.*

Definition 2.3.5. *Eine $(m \times n)$-Matrix ist in* reduzierter Zeilenform RZF*, wenn folgende Bedingung erfuellt ist:*

(1) in jeder Zeile ist das erste von null verschiedene Element (falls es eins gibt) eine 1 *(wir nenen es* die fuehrende 1*),*
(2) ausser einer fuehrenden 1 *sind in dessen Spalte nur Nullen.*

Lecture 5

Beispiele 2.3.6.

(1) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in reduzierter Zeilenform.
(2) Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in reduzierter Zeilenform.
(3) Die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in reduzierter Zeilenform.
(4) Die Matrix $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist in reduzierter Zeilenform.

Theorem 2.3.7. *Jede Matrix A ist zeilen-aequivalent zu einer Matrix in reduzierter Zeilenform.*

Proof. Schreibe $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ mit $a_{ij} \in K$.

- Falls alle Werte in der ersten Zeile null sind, dann ist Bedingung (1) fuer diese Zeile erfuellt.
- Falls es einen Wert in der ersten Zeile gibt, der nicht null ist, dann sei k der kleinste Index j, so dass $a_{1j} \neq 0$ (d.h. $a_{1k} \neq 0$, aber $a_{1j} = 0$ fuer alle $1 \leq j < k$). Wende die (EZU) $M(1, a_{1k}^{-1})$ an; dann ist Bedingung (1) erfuellt.
- Wende (EZU) $S(1, i, -a_{ik})$ an fuer alle $2 \leq i \leq m$; damit sind alle anderen Werte in Spalte k gleich null.

Wir wenden jetzt die gleiche Strategie auf die zweite Zeile an.

- Falls alle Werte in der zweiten Zeile null sind, dann ist Bedingung (1) fuer diese Zeile erfuellt.
- Falls es einen Wert in der zweiten Zeile gibt, der nicht null ist, dann sei ℓ der kleinste Index j, so dass $a_{2j} \neq 0$ (d.h. $a_{2\ell} \neq 0$, aber $a_{2j} = 0$ fuer alle $1 \leq j < \ell$). Wende die (EZU) $M(2, a_{2\ell}^{-1})$ an; dann ist Bedingung (1) erfuellt. (Beachte: $\ell \neq k$!)
- Wende (EZU) $S(2, i, -a_{i\ell})$ an fuer alle $1 \leq i \leq m$, $i \neq 2$; damit sind alle anderen Werte in Spalte ℓ gleich null.

Wiederhole das Verfahren fuer die anderen Zeilen. □

Definition 2.3.8. *Eine $(m \times n)$ Matrix A ist in* reduzierter Zeilenstufenform RZSF *(eng: row-reduced echelon form), wenn folgende Bedingungen erfuellt sind:*

(1) A ist in reduzierter Zeilenform;

(2) alle Zeilen von A, deren Werte alle gleich null sind, liegen unter den Zeilen, die einen von Null verschiedenen Wert enthalten;

(3) die fuehrende 1 einer Zeile liegt rechts von der fuehrenden 1 der Zeile darueber.

Mit anderen Worten, A hat folgende Form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 2.3.9. *Jede Matrix ist zeilen-aequivalent zu einer Matrix in reduzierter Zeilenstufenform.*

Proof. In Satz 2.3.7 haben wir bewiesen, dass jede Matrix zeilen-aequivalent zu einer Matrix in reduzierter Zeilenform ist. Es sei nun A eine Matrix in reduzierter Zeilenform. Wir koennen sie in reduzierte Zeilenstufenform ueberfuehren, indem wir endlich oft die (EZU) $P(r, s)$ (d.h. Vertauschen von Zeilen) anwenden. □

Beispiel 2.3.10. Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

$$M(1, -\frac{1}{9}) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S(1, 2, -4) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{9} \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S(1, 3, -6) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{9} \\ 2 & 0 & 1 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

$$S(2, 3, -2) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{55}{9} \end{pmatrix}$$

$$M(3, -\frac{3}{5}) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$S(3, 2, -\frac{4}{3}) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$S(3, 1, \frac{1}{3}) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$P(1, 2) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Im naechsten Abschnitt werden wir sehen, dass diese Rechnungen mit Matrizen sehr nuetzlich sind, um lineare Gleichungssysteme zu loesen.

2.4. **Lineare Gleichungssysteme.**

Beachte 2.4.1. *Betrachte das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Wir koennen es mit Hilfe von Matrizen schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt: gegeben seinen $m, n \geq 1$ und $\forall 1 \leq i \leq m$ eine Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

mit Unbekannten x_j. Dann koennen wir dieses Gleichungssystem in Matrixform ausdruecken:

$$Ax = b, \quad \textit{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definition 2.4.2. *Es sei $(S) : Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, wobei A eine $(m \times n)$-Matrix ist.*

- *Wir schreiben $L(S)$ fuer die Loesungen des Gleichungssystems, d.h.*

$$L(S) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} : x_i \in K,\ Ax = b \right\}.$$

- *Die erweiterte Matrix $A|b$ ist die $(m \times (n+1))$ Matrix, bei der der Spaltenvektor b als $(n+1)$ste Spalte der Matrix A hinzugefuegt wird.*

Beachte 2.4.3. *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist durch die erweiterte Matrix $A|b$ vollstaendig bestimmt.*

Bemerkung 2.4.4. *Wenn $b = 0$, dann schreiben wir A anstatt der erweiterten Matix $A|0$; man nennt ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$* homogen.

Theorem 2.4.5. *Es seien*

$$(S) : Ax = b \quad \textit{und} \quad (S') : A'x = b'$$

lineare Gleichungssysteme von jeweils m Gleichungen in n Unbekannten. Nimm an, dass die erweiterte Matrix $A'|b'$ zeilen-aequivalent zu $A|b$ ist. Dann gilt $L(S') = L(S)$.

Proof. Wir machen zunaechst folgende Beobachtungen:

- es ist ausreichend, den Satz zu zeigen, dass wenn (S') von (S) durch *eine* (EZU) konstruiert ist;
- es folgt von Bemerkung 2.3.4, dass es ausreichend ist zu zeigen, dass $L(S) \subseteq L(S')$.[9]

Wir muessen also folgende Behauptung beweisen: wenn (S') von (S) durch *eine* (EZU) konstruiert ist, dann gilt $L(S) \subseteq L(S')$. Wir analysieren dazu jede der drei Operationen einzeln: fuer die Operationen $P(r, s)$ und $M(r, \lambda)$ ist die Behauptung offensichtlich. Fuer die Operation $S(r, s, \lambda)$ argumentieren wir wie folgt: wenn (S') von (S) durch die Operation $S(r, s, \lambda)$ konstruiert wird, dann unterscheiden sich die erweiterten Matrizen $A|b$ und $A'|b'$ nur in der Zeile s:

$$a'_{sj} = a_{sj} + \lambda a_{rj} \qquad \text{und} \qquad b'_s = b_s + \lambda b_r.$$

Es sei x eine Loesung von (S), d.h. $\forall 0 \leq i \leq m$ gilt

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i.$$

Dann gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} & a_{s1} x_1 + \dots + a_{sn} x_n + \lambda(a_{r1} x_1 + \dots + a_{rn} x_n) = b_s + \lambda b_r \\ \Leftrightarrow \qquad & a'_{s1} x_1 + \dots + a'_{sn} x_n = b'_s, \end{aligned}$$

d.h. x ist eine Loesung von (S'). □

[9]Durch Symmetrie folgt dann, dass $L(S') \subseteq L(S)$, und so $L(S) = L(S')$.

Wir koennen also versuchen, ein lineares Gleichungssystem $(S) : Ax = b$ zu loesen, indem wir die erweiterte Matrix durch (EZU)s in reduzierte Zeilenstufenform umformen.

Beispiel 2.4.6. Betrachten wir das lineare Gleichungssystem $(S) : Ax = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Wir haben bereits in Beispiel 2.3.10 gesehen, dass A zeilen-aequivalent zu folgender Matrix ist:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Wir koennen nun also direkt die Loesungen ablesen:

$$L(S) = \left\{ x_1 = -\frac{17}{3}x_4,\, x_2 = \frac{5}{3}x_4,\, x_3 = \frac{11}{3}x_4 : x_4 \in K \right\}.$$

Betrachten wir nun das Gleichungssystem $(S') :\; Ax = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die erweiterte Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 & | & 9 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & | & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 5 & | & -5 \end{pmatrix}.$$

Mit den gleichen Schritten wie in Beispiel 2.3.10 wandeln wir sie in reduzierte Zeilenstufenform um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} & | & -\frac{22}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & | & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} & | & \frac{51}{5} \end{pmatrix}$$

d.h.

$$x_1 + \frac{17}{3}x_4 = -\frac{22}{5}, \quad x_2 - \frac{5}{3}x_4 = \frac{12}{5} \quad x_3 - \frac{11}{3}x_4 = \frac{51}{5},$$

und wir erhalten die Loesungsmenge

$$L(S') = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 = -\frac{22}{5} - \frac{17}{3}x_4,\, x_2 = \frac{12}{5} + \frac{5}{3}x_4,\, x_3 = \frac{51}{5} + \frac{11}{3}x_4 : x_4 \in K \right\}.$$

Lecture 6

Beispiel 2.4.7. Gegeben sei

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

wobei b_1, b_2, b_3 Elemente von $\mathbb{R}$ sind. Die erweiterte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & b_1 \\ 2 & 1 & 1 & | & b_2 \\ 0 & 5 & -1 & | & b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir wandeln sie in reduzierte Zeilenstufenform um:

$$\begin{aligned}
S(1,2,-2) \quad &\to \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & 5 & -1 & | & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 5 & -1 & | & b_3 \end{pmatrix} \\
S(2,3,-1) \quad &\to \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & 5 & -1 & | & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_2 + 2b_1 \end{pmatrix} \\
M(2, \frac{1}{5}) \quad &\to \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & | & \frac{1}{5}(b_2 - 2b_1) \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_2 + 2b_1 \end{pmatrix} \\
S(2,1,2) \quad &\to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & | & \frac{1}{5}(b_1 + 2b_2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & | & \frac{1}{5}(b_2 - 2b_1) \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_2 + 2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In other words, (S) is equivalent to

$$x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_1 + 2b_2), \quad x_2 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_2 - 2b_1), \quad 0 = b_3 - b_2 + 2b_1.$$

Es koennen also folgende Faelle auftreten:

- wenn $b_3 - b_2 + 2b_1 \neq 0$, dann gibt es keine Loesung: $L(S) = \emptyset$;
- wenn $b_3 - b_2 + 2b_1 = 0$, dann ist das System aequivalent zu

$$x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_1 + 2b_2), \quad x_2 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_2 - 2b_1),$$

d.h. $L(S) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_1 + 2b_2),\ x_2 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}(b_2 - 2b_1) : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$

3. Vektorraeume

3.1. Definition und Beispiele.

Definition 3.1.1. *Es sei K ein Koerper. Ein* Vektorraum ueber K *ist eine Menge V mit zwei Operationen*

$$+ : V \times V \to V, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2, \tag{6}$$

$$\times : K \times V \to V \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v \tag{7}$$

so dass die folgenden Bedingungen erfuellt sind:

(VR1) $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$;
(VR2) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : v_1 + (v_2 + v_3) =)v_1 + v_2) + v_3$;
(VR3) $\exists\, 0_V \in V$ *so dass* $\forall v \in V$ *gilt:* $0_V + v = v$;
(VR4) $\forall v \in V\, \exists w \in V$ *so dass* $v + w = 0_V$; *with schreiben*[10] $w = -v$;
(VR5) $\forall v_1, v_2 \in V$ *und* $\forall \lambda \in K$ *gilt* $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$;
(VR6) $\forall v \in V$ *and* $\forall \lambda, \mu \in K$ *gilt* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
(VR7) $\forall v \in V$ *and* $\forall \lambda, \mu \in K$ *gilt* $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
(VR8) $\forall v \in V$ *gilt* $1v = v$.

Bemerkung 3.1.2. *Die Operationen* (6) *und* (7) *heissen jeweils* Vektor Addition *und* Skalar-Multiplikation.

Beispiele 3.1.3.

(1) Die Menge aller Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ ist ein K-Vektorraum. Allgemeiner ist die Menge aller Spaltenvektoren mit n Eintraegen ein K-Vektorraum unter der Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen (Def. 2.2.5); wir schreiben ihn als K^n.
(2) Der triviale K-Vektorraum ist $\{0\}$.
(3) Die Menge aller Fibonacci Folgen von Definition 1.1.3 ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
(4) Es sei K ein Koerper, and $K[x]^{\leq n}$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K vom Grad $\leq n$. Dann ist $K[x]^{\leq n}$ ein K-Vektorraum.
(5) Es sei
$$V = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}.$$
Dann ist f ein $\mathbb{R}$-Vektorraum unter der punktweisen Addition von Funktionen.
(6) Es sei
$$U = \{f \in V : f(1/2) = 0\}.$$
Dann ist U ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: es ist ein *Unterraum* von V.
(7) Es sei
$$U' = \{f \in V : f(1/2) = 1\}.$$
Dann ist U' **kein** $\mathbb{R}$-Vektorraum (warum nicht?).

Satz 3.1.4. *Es sei V ein K-Vektorraum. Dann gibt es genau ein Element mit der Eigenschaft (VR3); wir nennen es die* additive Identitaet *von V.*

Proof. Nimm an, dass 0_V und $0'_V$ die Eigenschaft (VR3) haben. Dann gilt
$$0_V = 0_V + 0'_V = 0'_V.$$
□

Korollar 3.1.5. *Let $v \in V$. Dann ist das Element in (VR4) eindeutig bestimmt; es heisst das* (additive) Inverse[11] *von v.*

Proof. Nimm an, es gibt $u, u' \in V$ so dass
$$v + u = v + u' = 0_V.$$
Dann gilt
$$u = u + 0_V = u + (v + u') = (u + v) + u' = 0_V + u' = u'.$$
□

[10] Diese Schreibweise ist an dieser Stelle missverstaendlich, da (noch) nicht klar ist, dass es genau ein w gibt, so dass $v + w = 0_V$ gilt. Wir zeigen die Eindeutigkeit in Korollary 3.1.5.

[11] Falls Sie etwas Gruppentheorie gelernt haben: $(V, +)$ ist eine *abelsche Gruppe*.

Satz 3.1.6. *Es sei V ein K Vektorraum, und es seien $\lambda \in K$ und $v \in V$. Dann gilt*

(1) $\lambda 0_V = 0_V$*;*
(2) $0v = 0_V$*;*
(3) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$*;*
(4) if $\lambda v = 0_V$*, then* $\lambda = 0$ *or* $v = 0_V$*.*

Proof. (1) - (3) Uebung.
(4) Wir zeigen folgende Aussage[12]: wenn $\lambda v = 0_V$ und $\lambda \neq 0$, dann gilt $v = 0$. Da $\lambda \neq 0$, hat λ ein multiplikatives inverses Element $\lambda^{-1} \in K$. Dann gilt

$$\lambda v = 0_V \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1}(\lambda v) = 0_V \qquad \text{wegen (1)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda^{-1}\lambda)v = 0_V \qquad \text{wegen (VR7)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1.v = v = 0_V \qquad \text{wegen (VR8)} \tag{10}$$

□

[12]Vergewissern Sie sich, dass diese Aussage aequivalent zu (4) ist.

3.2. **Unterräume.**

Definition 3.2.1. *Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Teillmenge $U \subseteq V$ ist ein* Unterraum *wenn $U \neq \emptyset$ und wenn sie bezueglich Addition und Skalar-Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. wenn sie folgende zwei Bedingungen erfuellt:*

(UR1) $\forall u, v \in U$ gilt $u + v \in U$;
(UR2) $\forall u \in U$ und $\forall \lambda \in K$ gilt $\lambda u \in U$.

Wir schreiben $U \leq V$.

Der folgende Satz ist nuetzlich um festzustellen, ob eine Teilmenge eines Vektorraumes ein Unterraum ist:

Satz 3.2.2. *Eine Teilmenge U von einem Vektorraum V ist dann und nur dann ein Unterraum von V, wenn folgende Bedinungen erfuellt sind:*

(1) $0_V \in U$;
(2) $\forall u, v \in U$ und $\lambda \in K$ gilt $\lambda u + v \in U$.

Proof. Nimm an, dass U ein Unterraum ist. Da $U \neq \emptyset$, gibt es ein $u \in U$. Da U bezueglich der Salar-Multiplikation abgeschlossen ist, gilt

$$0u \in U \quad \Leftrightarrow \quad 0_V \in U,$$

da $0u = 0_V$ (Prop. 3.1.6 (2)). Es seien nun $u, v \in U$ und $\lambda \in K$. Dann ist $\lambda u \in U$ wegen (UR2) und $\lambda u + v \in U$ wegen (UR2).

Nimm nun an, dass die Bedingungen erfuellt sind. Dann ist U nicht die leere Menge da $0_V \in U$. Es seien nun $u, v \in U$. Fuer $\lambda = 1$ erhalten wirt $u + v \in U$. Weiterhin, fuer $\lambda \in K$ und $v = 0_V$ erhalten wir

$$\lambda u + 0_V = \lambda u \in U,$$

d.h. U ist ein Unterraum. □

Beispiele 3.2.3.

(1) Es sei V ein Vektorraum. Dann sind $\{0\}$ und V die trivialen Unterraeume von V.
(2) Es sei $V = \mathbb{R}^3$, und es sei
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V : x + y + z = 0 \right\}.$$
Dann ist U ein Unterraum von V.
(3) Wie im vorherigen Beispiel sei $V = \mathbb{R}^3$. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Dann ist
$$U' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V : x + y + z = \lambda \right\}$$
kein Unterraum von V, da er unter den Operationen der Addition und der Skalar-Multiplikation nicht abgeschlossen ist.
(4) Das vorherige Beispiel hat folgende Verallgemeinerung: es sei $A \in M_{m \times n}(K)$ und $b \in M_{m \times 1}(K)$, und wir betrachten das lineare Gleichungssystem
$$(S) : \; Ax = b.$$
Die Loesungsmenge $L(S) \subseteq K^n$ ist dann und nur dann ein Unterraum von K^n, wenn $b = 0$; in diesem Fall nennen wir (S) ein *homogenes* lineares Gleichungssystem.
(5) Es sei $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ (ein komplexer Vektorraum unter der normalen Matrix-Addition) und U die Teilmenge der invertierbaren Matrizen. Dann ist U kein Unterraum, da die Null-Matrix nicht invertierbar ist.
(6) Wieder sei $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ und U' die Teilmenge der nicht invertierbaren Matrizen. Ist U' ein Unterraum? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Wie ist es mit der Teilmenge U'' der oberen Dreiecksmatrizen?

Das folgende Beispiel ist sehr wichtig: $\boxed{\text{Lecture 7}}$

Satz 3.2.4. *Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Es sei*

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in K \,\forall\, 1 \le i \le n\}.$$

Dann ist U ein Unterraum; wir nennen ihn den von $v_1, \dots, v_n$ erzeugten Unterraum *oder die* lineare Huelle von $v_1, \dots, v_n$ *und schreiben*

$$U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Proof. Wir beweisen den Satz mit Hilfe von Satz 3.2.2: fuer $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ erhalten wir $0_V \in U$. Es seien nun $u, w \in U$ und $\lambda \in K$. Aufgrund der Definition von U gibt es Skalare $\mu_1, \dots, \mu_n$ und $\nu_1, \dots, \nu_n$ so dass

$$u = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \quad \text{und} \quad w = \nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n.$$

Daher

$$\begin{aligned} u + \lambda w &= \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n + \lambda(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) \\ &= (\mu_1 + \lambda \nu_1) v_1 + \cdots + (\mu_n + \lambda \nu_n) v_n \end{aligned}$$

was ebenfalls ein Element von U ist. □

Bemerkung 3.2.5. *Wir koennen diese Beispiel wie folgt verallgemeinern: es sei S eine (moeglicherweise unendliche) Teilmenge von V. Wir definieren die* lineare Huelle $\langle S \rangle$ *von S als*[13]

$$\langle S \rangle = \{v \in V : \exists\, n \ge 0,\ v_1 \dots, v_n \in S \text{ und } \lambda_1 \dots, \lambda_n \in K \text{ so dass } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\}.$$

Insbesondere ist der Null-Vektorraum die lineare Hülle der leeren Menge.

Beachten Sie, dass S unendlich sein kann: wir erlauben trotzdem nur endliche *Summen.*[14]

Beispiel 3.2.6. Es sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, und es sei U der von den Matrizen $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt Unterraum. Dann ist U der Unterraum der oberen Dreiecksmatrizen.

Es seinen nun $v_1 = e_{11} + e_{12}$, $v_2 = e_{12} + e_{22}$ und $v_3 = e_{22} + e_{11}$. Was ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$?

Beispiel 3.2.7. Es sei V der Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n \ge 1}$ mit Eintraegen in $\mathbb{Q}$, und fuer $i \ge i$ sei $e_i \in V$ die Folge, die an der $i$ten Stelle eine 1 hat und ansonsten Nullen. Dann ist

$$\langle e_i : i \ge 1 \rangle \ne V,$$

da sich z.B. die konstante Folge $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ nicht in der linearen Huelle enthalten ist. Andererseits sei V' der Unterraum von V aller *endlichen* Folgen. Dann gilt

$$V' = \langle e_i : i \ge 1 \rangle\,.$$

Beispiel 3.2.8. Es sei $V = \mathbb{R}^3$, und es sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Ist der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in U enthalten? Wir koennen diese Frage as lineares Gleichungssystem formulieren: hat das System

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Loesung? Uebung.

Satz 3.2.9. *Es sei V ein Vektorraum und $U \le V$ ein Unterraum. Dann ist U ebenfalls ein Vektorraum. Ausserdem gilt: wenn $W \le U$ und $U \le V$, dann $W \le V$.*

Proof. Ueberpruefen Sie die Axiome. □

Aus zwei Unterraeumen lassen sich auf mehrere Arten neue Unterraeume konstruieren:

Theorem 3.2.10. *Es seien $U, W \le V$.*

(1) Die Schnittmenge

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \wedge v \in W\}$$

ist ein Unterraum von V.

[13] gesprochen *Krokodilklammer von S*

[14] Fuer unendliche Summen bracht man den Begriff der Konvergenz – diese fuehrt zu der Theorie von Banachraeumen.

(2) Die Summe von U und W,

$$U + W = \{u + w : \, u \in U, \, w \in W\}$$

ist ein Unterraum von V.

Proof. Wir beweisen (1) mit Hilfe von Satz 3.2.2: da U und W Unterraeume sind, enthalten beide das Element 0_V. Daher gilt $0_V \in U \cap W$. Es seien nun $u, w \in U \cap W$ und $\lambda \in K$. Da U und W Unterraeume sind, ist das Element $u + \lambda w$ in beiden Unterraeumen enthalten, und daher auch in $U \cap W$.

(2) kann mit aehnlichen Argumenten bewiesen werden (Uebung). $\square$

3.3. **Basen von Vektorraeumen.** Zurueck zum Satz 3.2.4:

Definition 3.3.1. *Es sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots v_n \in V$. Ein Element der Form*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

mit $\lambda_i \in K$ ist eine Linearkombination *von $v_1, \dots, v_n$.*

Beispiel 3.3.2. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann koennen wir v als eine Linearkombination der Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schreiben:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Definition 3.3.3. *Es sei V ein Vektorraum. Dann ist V* endlich-dimensional *wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt so dass*

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle :$$

mit anderen Worten, wenn jeder Vektor als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ geschrieben werden kann; diese Linearkombination muss nicht *eindeutig sein. Wir nennen $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendessystem.*

Bemerkung. Es sei V ein Vektorraum und $U \leq V$. Dann ist U endlich-dimensional, wenn es $u_1, \dots, u_n \in U$ gibt, so dass

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle.$$

Es ist hierbei wichtig, dass die Elemente $u_1, \dots, u_n$ selber in U sind! Um z.B. zu zeigen, dass der Unterraum $U \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

endlich-dimesnional ist, reicht es nicht zu sagen, dass sich jede Matrix in U als Linearkombination der Matrizen

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben laesst, da e_{11} und e_{22} nicht in U sind.

Beispiele 3.3.4.

(1) Beispiel 3.3.2 zeigt, dass e_1, e_2, e_3 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist; daher ist $\mathbb{R}^3$ endlich-dimensional.
(2) Auf gleiche Weise koennen wir zeigen, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist endlich-dimensional ist.
(3) For $n \geq 1$ ist $M_{n\times n}(K)$ endlich-dimensional.
(4) Es sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = -d \right\}.$$

Dann ist U ein endlich dimensionaler Unterraum von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (Uebung: beweisen Sie das, und finden Sie in beiden Faelle ein endliches Erzeugendessystem.)
(5) Es sei V der Vektorraum aller unendlichen reellen Folgen

$$V = \{(a_0, a_1, a_n \dots) : a_i \in \mathbb{R} \, \forall i\},$$

wobei die Addition und Skalarmultiplikation wie in Kapitel 1.1 definiert sind. Wir werden in Beispiel 3.3.25 beweisen, dass V nicht endlich-dimensional ist. Allerdings haben wir schon gesehen, dass der Unterraum der Fibonacci-Folgen endlich-dimensional ist: die Folgen $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$ sind ein Erzeugendessystem (Satz 1.1.9).

Beispiel 3.3.5. Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Mit anderen Worten, hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

eine Loesung fuer alle Vektoren $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$? Die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 + b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten, (11) hat genau dann eine Loesung, wenn $b_3 = 2b_2 + b_1$; ansonsten hat es keine Loesung. Das bedeutet, dass z.B. der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht in der linearen Huelle von v_1, v_2, v_3 enthalten ist, d.h. v_1, v_2, v_3 ist kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

Die Definition 3.3.3 wirft folgende Fragen auf:

- Wie (wenn ueberhaupt) koennen wir die Dimension eines Vektorraums definieren?
- Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, ist dann auch jeder Unterraum von V endlich-dimensional?

Zurueck zum Beispiel 3.3.2: das Erzeugendensystem e_1, e_2, e_3 hat eine wichtige Eigenschaft, naemlich dass jedes Element in $\mathbb{R}^3$ *eindeutig* als eine Linearkombination der Vektoren dargestellt werden kann: es sei $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$v = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

und es gibt keine andere Moeglichkeit, v als Linearkombination der Vektoren e_1, e_2, e_3 zu schreiben.

Nun ist e_1, e_2, e_3, f mit $f = e_1 + e_2$ ebenfalls ein Erzeugendensystem: allerdings hat es den Nachteil, dass sich Vektoren in $\mathbb{R}^3$ nicht mehr eindeutig als Linearkombination der erzeugenden Vektoren schreiben lassen: z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = e_1 + e_2 - f.$$

Definition 3.3.6. *Es sei V ein Vektorraum, und es seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$* linear unabhaengig*, wenn sich 0_V* eindeutig *als Linearkombination dieser Vektoren darstellen laesst: naemlich*

$$0_V = 0e_1 + \cdots + 0v_n.$$

Mit anderen Worten, $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhaengig wenn gilt

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Wenn sie nicht linear unabhaengig sind, dann nennen wir sie linear abhaengig.

Bemerkung 3.3.7. *Wir koennen diese Definition of unendliche Erzeugendensystem verallgemeinern: es sei $S \subseteq V$. Dann ist S linear unabhaengig wenn jede endliche Teilmenge von S linear unabhaengig ist. Zu ist z.B. die Menge $\{e_i : i \geq 1\}$ aus Beispiel 3.2.7 linear unabhaengig.*

Wenn $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhaengig sind, dann laesst sich *jeder* Vektor in der linearen Huelle (nicht nur der Nullvektor) von $v_1, \dots, v_n$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren darstellen: Lecture 8

Satz 3.3.8. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhaengig. Dann kann jeder Vektor $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$* eindeutig *als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ dargestellt werden.*

Proof. Nimm an, es gibt $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ so dass

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

fuer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) - (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0_V \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0, \end{aligned}$$

da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhaengig sind. Daher gilt

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 \quad \ldots \quad \alpha_n = \beta_n,$$

was zu beweisen war. □

Beispiele 3.3.9.

(1) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, und wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann sind v_1, v_2, v_3 linear abhaengig: $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$. Hingegen sind die Vektoren v_1, v_2 linear unabhaengig: die einzige Loesung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Es sei $V = \mathbb{R}^3$, und wir betrachten die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sind diese Vektoren linear unabhaengig? Mit anderen Worten, hat die Gleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0 \tag{12}$$

eine Loesung ausser $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$? Wir haben diese Frage bereits in Beispiel 2.3.5 beantwortet: $x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$x_1 = \frac{17}{3} x_4, \quad x_2 = \frac{5}{3} x_4, \quad x_3 = \frac{11}{3} x_4$$

ist eine Loesung von (12). Daher sind die Vektoren linear abhaengig.

(3) Generell kann man zeigen, dass je drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ (allgemeiner: je $n+1$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$) linear abhaengig sind – wir werden spaeter verstehen, warum dies so ist.

(4) Per Konvention ist die leere Menge $\emptyset$ linear unabhaengig, und es gilt $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Lemma 3.3.10. *Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

- *Wenn zwei der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gleich sind, oder wenn ein Vektor ein Vielfaches von einem anderen Vektor ist, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhaengig.*
- *Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhaengig und $c_1, \ldots, c_n \in K$ alle $\neq 0$ sind, dann sind auch $c_1 v_1, \ldots, c_n v_n$ linear unabhaengig.*
- *Wenn einer der Vektoren der Nullvektor 0_V ist, dann ist $v_1, \ldots, v_n$ linear abhaengig.*

Proof. Uebung. □

Lemma 3.3.11.

(1) Es sei V ein Vektorraum und $v \in V$, $v \neq \{0\}$. Dann ist v linear unabhaengig.

(2) Der Nullvektor 0_V ist linear abhaengig.

Proof. Klar. □

Satz 3.3.12. *Es seien $v_1 \ldots, v_n \in V$ linear unabhaengig, und es sei v_{n+1} ein Vektor in V, der nicht in $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ enthalten ist. Dann sind $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhaengig.*

Proof. Nimm an, dass $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear abhaengig sind, d.h. es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$, nicht alle null, so dass

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0.$$

Dann ist $\alpha_{n+1} \neq 0$, da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhaengig sind. Dann aber folgt, dass

$$v_{n+1} = -\alpha_{n+1}^{-1} \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \right),$$

d.h. $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, was ein Widerspruch ist. Daher ist unsere Annahme falsch. □

Definition 3.3.13. *Es sei V ein Vektorraum. Eine* Basis von V *ist ein linear unabhaengiges Erzeugendensystem von V.*

Beispiele 3.3.14.

(1) e_1, e_2, e_3 ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$; $S = \{e_1, e_2, e_3, f\}$ mit $f = e_1 - e_2$ ist hingegen keine Basis: so haben wir

$$e_1 = f + e_2,$$

d.h. die Darstellung des Vektors e_1 als Linearkombination der Vektoren in S ist nicht eindeutig.

(2) $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ und $\mathcal{F}_{1,\psi}$ sind eine Basis des Vektorraums von Fibonacci Folgen. Die Folgen $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$ sind ebenfalls eine Basis.

(3) Es seien e_{11}, e_{12} und e_{22} wie in Beispiel 3.2.6. Dann sind diese Vektoren eine Basis fuer den Unterraum U der oberen Dreiecksmatrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Hat jeder Vektorraum eine Basis?

Theorem 3.3.15. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann enthaelt jedes endliche Erzeugendensystem eine Basis von V.*

Proof. Es sei S ein endliches Erzeugendensystem. Waehle eine Untermenge $T \subseteq S$, die linear unabhaengig ist und die groesstmoegliche Anzahl von Elementen enthaelt. Es gibt zwei Moeglichkeiten:

- Wenn die lineare Huelle von T gleich V ist, dann ist T eine Basis.
- Wenn $\langle T \rangle \neq V = \langle S \rangle$, dann koennen wir ein $v \in S$ waehlen, dass nicht in $\langle T \rangle$ enthalten ist. Dann ist $\{v\} \cup S$ linear unabhaengig aufgrund von Satz 3.3.12, was ein Widerspruch zur Definition von T ist. Daher kann es ein solches v nicht geben, d.h. $\langle T \rangle = V$.

□

Korollar 3.3.16. *Jeder endlich-dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis.*[15]

Es liegt nahe, die Dimension eines Vektorraums as die Anzahl der Element einer Basis zu definieren. Aber ist das wohldefiniert? Koennte ein endlich-dimensionaler Vektorraum nicht zwei Basen mit unterschiedlich vielen Elementen haben?

Lemma 3.3.17. *(Austauschlemma) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. Es sei $w \in V$ nicht null, mit der Linearkombination*

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{13}$$

mit $\alpha_i \in K$. Wenn $\alpha_j \neq 0$, dann ist auch

$$S' = \{v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von V.

Proof. Wir muessen zeigen, dass S' ein Erzeugendensystem und linear unabhaengig ist.

- Erzeugendensystem: wir zeigen zunaechst, dass $v_j \in \langle v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n \rangle$. Von Gleichung (13) sehen wir, dass

$$\alpha_j v_j = w - \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \quad v_j = \frac{1}{\alpha_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i. \tag{14}$$

[15] Es sei $V = \{0\}$. Dann ist $\emptyset$ is eine Basis von V. Der Nullvektor ist ein Erzeugendensystem von V, aber keine Basis, da er nicht linear unabhaengig ist.

Es sei $u \in V$. Da S eine Basis ist, ist es insbesondere ein Erzeugendensystem, und so gibt es $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ so dass

$$u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Indem wir Gleichung (14) dort einsetzen, erhalten wir einen Ausdruck fuer u als Linearkombination von $v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n$:

$$u = \frac{\beta_j}{\alpha_j} w + \sum_{i \neq j} \left(\beta_i - \beta_j \frac{\alpha_i}{\alpha j} \right) v_i,$$

d.h. S' ist ein Erzeugendensystem.

- Lineare Unabhaengigkeit: Nimm an, dass es Skalare $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ gibt, nicht alle gleich 0, so dass

$$\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{j-1} v_{j-1} + \gamma_j w + \gamma_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \gamma_n v_n = 0.$$

Wir setzen Gleichung (13) fuer w dort ein und erhalten

$$\alpha_j \gamma_j v_j + \sum_{i \neq j} (\gamma_i + \gamma_j \alpha_i) v_i = 0.$$

Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhaengig sind, gilt daher

$$\alpha_j \gamma_j = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_i + \gamma_j \alpha_i = 0 \, \forall \, i \neq j.$$

Nun ist $\alpha_j \neq 0$ und daher $\gamma_j = 0$, was impliziert, dass ebenfalls $\gamma_i = 0$ fuer alle $i \neq j$.

□

Beispiele 3.3.18.

(1) Wir wissen aus Beispiel 3.3.14 (1), dass e_1, e_2, e_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Indem wir Lemma 3.3.17 mehrfach anwenden, sehen wir, dass $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $e_3 + e_1$ ebenfalls eine Basis ist.

(2) Wir verstehen jetzt, warum sowohl $\mathcal{F}_{1,\varphi}, \mathcal{F}_{1,\psi}$ als auch $\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{0,1}$ Basen den Raumes aller Fibonacci Folgen sind: von Satz 1.1.9 wissen wir, dass

$$\mathcal{F}_{1,\varphi} = \mathcal{F}_{1,0} + \varphi \mathcal{F}_{0,1} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}_{1,\psi} = \mathcal{F}_{1,0} + \psi \mathcal{F}_{0,1}.$$

Daher folgt aus dem Austauschlemma, dass $\mathcal{F}_{1,\varphi}, \mathcal{F}_{1,\psi}$ ebenfalls eine Basis ist.

(3) Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nicht der Null-Vektorraum ist. Dann hat V unendlich viele verschiedene Basen.

Theorem 3.3.19. *(Austauschsatz) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Es seien $w_1, \dots, w_k$ linear unabhaengiger Vektoren in V. Dann gilt $k \leq n$, und es gibt $(n-k)$ Basisvektoren, die zusammen mit $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von V bilden.*

Proof. Wir beweisen den Satz ueber Induktion nach k.

$k = 1$: Das ist Lemma 3.3.17.

Wir nehmen nun an, dass der Satz fuer k gilt. Es seien $w_1, \dots, w_{k+1}$ linear unabhaengiger Vektoren in V. Dann sind auch $w_1, \dots, w_k$ linear unabhaengig, und es gilt $k < n$ und es gibt $(n-k)$ Basisvektoren, die zusammen mit $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von V bilden. (Beachten Sie, dass der Fall $k = n$ nicht eintreten kann: dann waeren $w_1, \dots, w_k$ selber einen Basis, und $w_1, \dots, w_{k+1}$ koennen nicht linear unabhaengig sein.)

Dann koennen wir w_{k+1} als eine Linearkombination dieser Vektoren schreiben:

$$w_{k+1} = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

mit $\alpha_i \in K$ nicht alle null. Da $w_1, \dots, w_{k+1}$ linear unabhaengig sind, ist w_{k+1} nicht in dem von $w_1, \dots, w_k$ erzeugten Unterraum enthalten. Es gibt also einen Index j, $k+1 \leq j \leq n$, so dass $\alpha_j \neq 0$. Dann koennen wir nach Lemma 3.3.17 den Vektor v_j gegen den Vektor w_{k+1} austauschen und erhalten eine Basis

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_{j-1}, w_{k+1}, v_{j+1}, \dots, v_n.$$

□

Lecture 9

Korollar 3.3.20. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und es seien $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$ Basen von V. Dann gilt $m = n$. Mit anderen Worten, alle Basen von V haben die gleiche Anzahl von Elementen.*

Wir koennen nun endlich die Dimension eines Vektorraums definieren:

Definition 3.3.21. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Die* Dimension *von V ist die Anzahl von Elementen einer Basis von V; wir schreiben* $\dim_K V$. *Wenn V nicht endlich-dimensional ist, dann schreiben wir* $\dim_K V = \infty$.

Beispiele 3.3.22.

(1) $\mathbb{R}^3$ ist ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Allgemeiner: $\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum; die *Standardbasis* ist gegeben durch die Spaltenvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Der Raum aller Fibonacci Folgen ist 2-dimensional.

(3) Es sei K ein Koerper und $V = K[x]^{\leq n}$. Dann ist $\dim_K V = n + 1$.

(4) $\mathbb{C}$ ist ein 1-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum (was ist eine Basis?), aber ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$ Vektorraum (mit Basis 1, i).[16]

(5) Es gilt $\dim_K\{0\} = 0$, da $\emptyset$ eine Basis von $\{0\}$ ist und $|\emptyset| = 0$. Der Null-Vektorraum ist der einzige Vektorraum der Dimension 0.

(6) Es sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}.$$

Dann ist U ein zwei-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, mit Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Theorem 3.3.19 hat ein paar schoene und interessante Konsequenzen:

Satz 3.3.23. *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Dimension n. Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen aequivalent:*

(i) $v_1, \dots, v_n$ *sind linear unabhaengig;*
(ii) $v_1, \dots, v_n$ *sind ein Erzeugendensystem von V;*
(iii) $v_1, \dots, v_n$ *sind eine Basis von V.*

Proof. (iii) $\Rightarrow$ (i),(ii) ist klar von der Definition.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Aufgrund von Theorem 3.3.19 koennen wir $\{v_1, \dots, v_n\}$ zu einer Basis von V erweitern. Aber jede Basis von V hat n Elemente, daher ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ selber eine Basis.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Aus Theorem 3.3.15 folgt, dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis enthaelt. Aber jede Basis von V hat n Elemente, daher ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ selber eine Basis. □

Satz 3.3.24. *Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, und es seien $v_1, \dots, v_k \in V$.*

(i) Wenn $k < n$, dann sind $v_1, \dots, v_k$ kein Erzeugendensystem fuer V.
(ii) Wenn $k > n$, dann sind $v_1, \dots, v_k$ linear abhaengig.

Proof. (i) Nimm an, dass $v_1, \dots, v_k$ ein Erzeugendensystem fuer V ist. Dann enthaelt es eine Basis (Theorem 3.3.15). Da aber jede Basis n Elemente enthaelt, erhalten wir einen Widerspruch.

(ii) Nimm an, dass $v_1, \dots, v_k$ linear unabhaengig sind. Dann koennen wir $\{v_1, \dots, v_k\}$ zu einer Basis von V erweitern (Theorem 3.3.19). Aber jede Basis enthaelt n Elemente, was wiederum einen Widerspruch ergibt. □

Beispiele 3.3.25.

(1) Zurueck zum Beispiel 3.3.9 (3): es folgt direkt von Satz 3.3.24, dass alle $n + 1$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ linear abhaengig sind.

(2) Es sei V der Vektorraum aller reellen Folgen. Wir koennen jetzt beweisen, dass V nicht endlich-dimensional ist: fuer $n \geq 1$ sei $\mathcal{F}_n$ die Folge, deren $n$ter Wert eine 1 ist und alle anderen Werte null sind. Dann ist die unendliche Menge $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ linear unabhaengig. Es folgt aus Proposition 3.3.24 (ii), dass V nicht endlich-dimensional sein kann.

---

[16] Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}$ ein unendlich-dimensional $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Diese haengt eng mit der sogenannten *Kontinuumshypothese* zisammen.

3.4. **Basen von Unterraeumen.**

Beachte 3.4.1. *Es sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V, und es seien $u_1, \dots, u_n \in U$. Wenn $u_1, \dots, u_n$ linear unabhaengig sind als Elemente von U, dann sind sie ebenfalls linear unabhaengig als Elemente von V.*

Satz 3.4.2. *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und es sei U ein Unterraum von V. Dann ist U endlich-dimensional, und*

$$\dim_K U \leq \dim_K V,$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $U = V$.

Proof. Es sei $n = \dim_K V$. Wenn $U = \{0\}$, dann ist $\dim_K U = 0$ (Beispiel 3.3.22 (4)), und die Aussage folgt.

Nimm also an, dass $U \neq \{0\}$. Sei $u_1 \in U$, $u_1 \neq 0_V$. Dann gibt es zwei Moeglichkeiten: entweder ist $U = \langle u_1 \rangle$: in diesem Fall ist u_1 eine Basis fuer U, d.h. $\dim_K U = 1$, und die Aussage folgt. Oder $\langle u_1 \rangle \subsetneq U$: dann waehle $u_2 \in U - \langle u_1 \rangle$. Es folgt von Satz 3.3.12, dass u_1, u_2 linear unabhaengig sind.

Dann gibt es wieder zwei Moeglichkeiten: entweder ist $U = \langle u_1, u_2 \rangle$; in diesem Fall sind u_1, u_2 einen Basis von U. Oder $\langle u_1, u_2 \rangle \subsetneq U$; in diesem Fall waehlen wir ein $u_3 \in U - \langle u_1, u_2 \rangle$ usw.

Aufgrund von Satz 3.3.24 muss dieser Prozess nach hoechstens n Schritten enden. Wir erhalten also eine Liste $u_1, \dots, u_k$ fuer $k \leq n$ von linear unabhaengigen Vektoren so dass $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Es folgt von der Definition, dass $u_1, \dots, u_k$ eine Basis von U sind. Daher gilt

$$\dim_K U = k \leq n = \dim_K V.$$

Wenn $U = V$, dann gilt natuerlich $k = n$. Nimm umgekehrt an, dass $k = n$. Die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ sind eine Basis fuer U und daher linear unabhaengig; sie sind ebenfalls linear unabhaengig als Elemente von V (Note 3.4.1). Dann folgt von Satz 3.3.23, dass sie eine Basis von V sind, und daher $U = V$. □

Wir haben in Theorem 3.2.10 gesehen, dass sich aus zwei Unterraumen U, W von V die Unterraeume $U \cap W$ und $U + W$ bilden lassen. Was koennen wir ueber deren Dimensionen sagen? Die naive Vermutung, dass $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$gilt, ist (im allgemeinen) falsch: wenn beispielsweise $U = W \lneq V$ und $U \neq \{0\}$, dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim U < 2 \dim U.$$

Sehen wir uns ein weiteres Beispiel an, um die Phaenomene, die auftreten koennen, besser zu verstehen:

Beispiel 3.4.3. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4.

- Es seien $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $W = \langle e_3 \rangle$. Dann ist

  $$U + W = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

  die Vektoren e_1, e_2, e_3 sind linear unabhaengig, und daher gilt

  $$\dim(U + W) = 3 = 2 + 1 = \dim U + \dim W.$$

- Es seien nun

  $$U' = \langle e_2, e_3 \rangle \qquad \text{und} \qquad W' = \langle e_2 + e_3, e_4 \rangle.$$

  Insbesondere gilt $\dim U' = \dim W' = 2$. Per Definition gilt

  $$U' + W' = \langle e_2, e_3, e_2 + e_3, e_4 \rangle.$$

  Nun sind die Vektoren $e_1, e_2, e_3, e_2 + e_3, e_4$ offensichtlich nicht linear unabhaengig: $e_2 + e_3 \in \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$, d.h.

  $$U' + W' = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle,$$

  und wir wissen, dass die Vektoren e_2, e_3, e_4 linear unabhaengig sind. Daher ist $U' + W'$ 3-dimensional. Was ist passiert?

  Der Grund, warum $\dim(U' + W') < \dim U' + \dim W'$, ist der, dass die Schnittmenge von U' und W' nicht der Null-Vektorraum ist: der Vektor $e_2 + e_3$ ist sowohl in U' als auch in W' enthalten, und er ist einen Basis fuer $U' \cap W'$ (Uebung), d.h. $\dim U' \cap W' = 1$. Haben Sie eine Vermutung, wie die allgemeine Formel fuer $\dim(U' + W')$ lautet?

Theorem 3.4.4. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und es seien U, W Unterraeume von V. Dann gilt*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

Proof. Es seien $\dim_K U = \ell$, $\dim_K W = m$ und $\dim_K(U \cap W) = k$. Waehle eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von $U \cap W$. Aufgrund von Theorem 3.3.19 koennen wir diese Basis zu Basen

$$v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{\ell-k}, \qquad \text{bzw.} \quad v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{m-k}$$

von U, bzw. von W erweitern. Wir behaupten nun, dass

$$v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{\ell-k}, w_1, \ldots, w_{m-k}$$

eine Basis ist von $U + W$.

Da $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ ist klar, dass

$$U + W = \langle v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{\ell-k}, w_1, \ldots, w_{m-k} \rangle.$$

Wir zeigen die lineare Unabhaengigkeit. Nimm an, dass

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{\ell-k} u_{\ell-k} + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-k} w_{m-k} = 0_V.$$

Dann folgt, dass Lecture 10

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{\ell-k} u_{\ell-k} = -(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-k} w_{m-k}).$$

Beachte nun, dass die linke Seite dieser Gleichung in U ist, die rechte aber in W. Schreibe $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{\ell-k} u_{\ell-k}$. Dann gilt $x \in U \cap W$. Da $v_1, \ldots, v_k$ einen Basis ist fuer $U \cap W$, gibt es $\delta_1, \ldots, \delta_k \in K$, so dass

$$x = \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k.$$

Aber ebenfalls gilt $x = -(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-k} w_{m-k})$, so dass

$$\delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-k} w_{m-k} = 0_V.$$

Da $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{m-k}$ eine Basis von W ist, folgt daraus, dass

$$\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m-k} = 0.$$

Daher gilt

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{\ell-k} u_{\ell-k} = 0_V.$$

Nun ist aber $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{\ell-k}$ eine Basis von U, daher folgt

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{\ell-k} = 0.$$

□

Warnung 3.4.5. *Es ist* ***nicht wahr****, dass fuer drei Unterraeume U, W, X von V folgende Formel gilt:*[17]

$$\dim(U+W+X) = \dim U + \dim W + \dim X - \dim(U \cap W) - \dim(U \cap X) - \dim(V \cap X) + \dim(U \cap W \cap X).$$

Finden Sie ein Gegenbeispiel, indem Sie geeignete Unterraeume von $\mathbb{R}^2$ betrachten. Hier ist ein Gegenbeispiel: es sei $V = \mathbb{R}^2$, und wir betrachten die drei ein-dimensionalen Unterraume

$$U = \langle e_1 \rangle, \qquad W = \langle e_2 \rangle, \qquad X = \langle e_1 + e_2 \rangle. \tag{15}$$

Dann ist $U + W + X = \mathbb{R}^2$, und

$$U \cap W = W \cap X = X \cap U = X \cap W \cap X = \{0\},$$

d.h. in (15) *erhalten wir* $2 = 3$*!*[18]

Korollar 3.4.6. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und es seien U, W Unterraeume von V. Dann sind folgende Aussagen aequivalent:*

(i) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$;
(ii) $\dim(U \cap W) = 0$;
(iii) $U \cap W = \{0_V\}$.
(iv) fuer jedes $v \in U + W$ gibt es genau ein $u \in U$ und $w \in W$ so dass $v = u + w$;
(v) die Gleichung $u + w = 0_V$ mit $u \in U$ und $w \in W$ hat $u = w = 0_V$ als einzige Loesung.

[17] Selbst viele professionelle Mathematiker wissen das nicht!

[18] Das Problem ist, dass im allgemeinen

$$(U + W) \cap X \neq U \cap X + W \cap X.$$

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): folgt direkt von Theorem 3.4.4.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): klar, da es genau einen Vektorraum der Dimension null gibt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Es sei $v \in V$, und nimm an, dass es $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ gibt, so dass

$$v = u + w = u' + w'.$$

Dann gilt $u - u' = w' - w$. Nun ist $u - u' \in U$ und $w' - w \in W$, d.h.

$$u - u',\ w' - w \in U \cap W.$$

Da $U \cap W = \{0_V\}$, folgt dass $u = u'$ und $w = w'$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): die Gleichung $u + w = 0_V$ hat die Loesung $u = w = 0_V$, und da U, W Unterraeume sind, elthalten beide das Element 0_V. Indemn wir nun (iv) auf $v = 0_V$ andwenden, sehen wir, dass dieses die einzige Loesung ist.

(v) $\Rightarrow$ (iii): nimm an, dass (iii) nicht wahr, ist, d.h. es gibt einen Vektor $v \in U \cap W$, der nicht der Nullvektor ist. Dann gilt

$$0_V = v + (-v),$$

und $v \in U$ und $-v \in W$, was einen Widerspruch zu (v) ist. □

Definition 3.4.7. *Es sei V ein K-Vektorraum und $U \leq V$. Ein Unterraum $W \leq V$ ist ein* Komplement *von U wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.*

Warnung. Es ist *nicht* wahr, dass das Komplement von $U \leq V$ gegeben ist durch $V - U$!

Satz 3.4.8. *Es sei $U \leq V$. Dann gibt es einen Unterraum $W \leq V$, der ein Komplement zu U ist.*

Proof. Es sei $u_1, \ldots, u_\ell$ eine Basis von U. Aufgrund von Theorem 3.3.19 wissen wir, dass wir diese Basis von U zu einer Basis von V erweitern koennen: es gibt Vektoren $w_1, \ldots, w_m \in V$, so dass $u_1, \ldots, u_\ell, w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von V ist. Es sei $W = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$. Dann ist W ein Komplement von U: da $u_1, \ldots, e_\ell, w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von V ist, gilt $V = U + W$. Nimm nun an, dass $v \in U \cap W$. Dann gibt es Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ so dass

$$\begin{aligned} & v = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i u_1 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\ell v_\ell - (\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) = 0_V \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = \lambda_1 = \lambda_m = 0, \end{aligned}$$

da die Vektoren $u_1, \ldots, e_\ell, w_1, \ldots, w_m$ liear unabhaengig sind. □

Beispiel 3.4.9. Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \langle e_1 \rangle$. Es sei $w \in V$ ein Vektor, so dass u, w linear unabhaengig sind (d.h. w ist kein Vielfaches von e_1). Dann ist $W = \langle w \rangle$ ein Komplement von U.

Bemerkung 3.4.10. *Das Komplement eines Unterraumes ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. So it in Beispiel 3.4.9 z.B. $\langle e_2 \rangle$ ein Komplement von U. Das Gleiche gilt fuer $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ oder fuer $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.*

3.5. **Zusammenfassung der Rechenmethoden.** Wir haben in den vorherigen Abschnitten gesehen, dass wir lineare Gleichungssysteme fuer die Analyse von Vektorraeumen benutzen koennen. Hier ist eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse: es sei $V = K^m$ und $v_1, \dots v_n \in V$.

(1) Gegeben sei $w \in V$. Ist $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$?
Antwort: $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ist aequivalent zu der Aussage: es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so dass

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n. \tag{16}$$

Schreiben wir $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ und $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ fuer $1 \leq j \leq n$, dann ist (16) aequivalent zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

das wir mit Hilfe der reduzierten Zeilenspaltenform loesen koennen.

(2) Koennen wir bestimmen, welche Vektoren in $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ enthalten sind?
Antwort: es sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor in V. Dann betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und bestimmen, fuer welche Vektoren b eine Loesung existiert.

(3) Koennen wir bestimmen, ob $v_1, \dots, v_n$ linear unabhaengig sind?
Antwort: $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear unabhaengig, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die triviale Loesung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

3.6. **Zeilen und Spaltenraeume.**

Bemerkung 3.6.1. *Wir koennen ein Element von K^n entweder als Zeilen- oder Spaltenvektor mit n Werten schreiben.*

Definition 3.6.2. *Es seien $m, n \geq 1$ und $A \in M_{m\times n}(K)$. Es seien $u_1, \dots, u_m \in K^n$ die Zeilen von A und $v_1, \dots, v_n \in K^m$ die Spalten von A. Wir definieren*

$$\begin{aligned}\mathrm{Zeilen}(A) =& \langle u_1, \dots, u_m\rangle \leq K^n,\\ \mathrm{Spalten}(A) =& \langle v_1, \dots, v_n\rangle \leq K^m.\end{aligned}$$

Was koennen wir ueber die Dimensionen dieser Unterraeume sagen?

Definition 3.6.3. *Wir definieren*

$$\begin{aligned}\mathrm{Zeilenrang}(A) &= \dim_K \mathrm{Zeilen}(A),\\ \mathrm{Spaltenrang}(A) &= \dim_K \mathrm{Spalten}(A).\end{aligned}$$

Beispiele 3.6.4.

(1) Fuer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ gilt
$$\mathrm{Zeilenrang}(A) = 1 = \mathrm{Spaltenrang}(A).$$

(2) Fuer die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt
$$\mathrm{Zeilenrang}(B) = 2 = \mathrm{Spaltenrang}(B).$$

(3) Fuer die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ gilt
$$\mathrm{Zeilenrang}(C) = 3 = \mathrm{Spaltenrang}(C).$$

(4) Fuer die Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ gilt
$$\mathrm{Zeilenrang}(D) = 2 = \mathrm{Spaltenrang}(D).$$

(5) Fuer die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ gilt
$$\mathrm{Zeilenrang}(E) = 1 = \mathrm{Spaltenrang}(E).$$

Was faellt ihnen auf?

Hier ist das erste wirklich ueberraschende Resultat in diesem Kurs:[19]

Theorem 3.6.5. *Es seien $m, n \geq 1$ und $A \in M_{m\times n}(K)$. Dann gilt*

$$\mathrm{Zeilenrang}(A) = \mathrm{Spaltenrang}(A).$$

Fuer Matrizen in reduzierter Zeilenspaltenform ist dieses Resultat offensichtlich.

Lemma 3.6.6. *Theorem 3.6.5 gilt, wenn A in reduzierter Zeilenspaltenform ist.*

Proof. Aufgrund der Definition hat A folgende Form: [picture]

Es seien $j_1 < \cdots < j_r$ die Nummern derjenigen Spalten, die eine fuehrende Eins enthalten.

Es seien $u_1, \dots, u_r$ die Zeilenvektoren, die einen von Null verschiedenen Eintrag enthalten. Dann enthaelt jede dieser Zeilen eine fuehrende 1, und die Zeilenvektoren sind linear unabhaengig, weil $\forall 1 \leq k \leq r$ der erste von null verschiedene Eintrag von u_k die fuehrende 1 an der Stelle j_k ist, und $j_1 < \cdots < j_r$. Mit anderen Worten,

$$\mathrm{Zeilenrang}(A) = r.$$

[19] Ich gebe zu, dass ich es intuitiv immer noch nicht wirklich verstehe.

Was gilt fuer den Spaltenrang? Die Spaltenvektoren $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}$ sind ein Erzeugendensystem von Spalten(A); tatsaechlich sind sie die ersten r Standardvektoren $e_1, \ldots, e_r$ der Standardbasis $e_1, \ldots, e_m$ von K^m. Sie sind linear unabhaengig und daher eine Basis von Spalten(A), d.h.

$$\text{Spaltenrang}(A) = r.$$

$\square$

Der Beweis fuer eine beliebige Matrix A ist ziemlich kompliziert. Um die Aussage elegant beweisen zu koennen, brauchen wir die Theorie von linearen Abbildungen.

Bemerkung 3.6.7. *Ich weiss nicht, ob es eine Verallgemeinerung von Theorem 3.6.5 gibt, wenn wir statt einer $(m \times n)$-Matrix (d.h. einer $(m \times n)$-Tabelle von Zahlen) einen $(m \times n \times \ell)$-Wuerfel von Zahlen (einen sog. $(m \times n \times \ell)$-Tensor) betrachten. Sie koennen ja mal ein bisschen experimentieren.*

Lecture 11

4.1. **Definition und Beispiele.**

Definition 4.1.1. *Es seien V, W Vektorraeume ueber K. Eine Funktion $T : V \to W$ ist eine* lineare Abbildung*, wenn sie folgende Bedingungen erfuellt:*

(i) es gilt $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ fuer alle $v_1, v_2 \in V$;
(ii) es gilt $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ fuer all $v \in V$, $\alpha \in K$.

Mit anderen Worten, T respektiert die Vektoraddition und Skalarmultiplikation.
Eine lineare Abbildung $T : V \to V$ ist ein Endomorphismus *von V.*

Bemerkung 4.1.2. *Wir schreiben manchmal Tv anstatt $T(v)$.*

Beispiele 4.1.3.

(1) Es sei V ein Vektorraum. Die Identitaetsabbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto v$ ist linear.
(2) Es seien V, W Vektorraeume. Die Null-Abbildung $V \to W$, $v \mapsto 0_W$ ist linear.
(3) Es sei $K[x]^{\leq n}$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$. The Ableitungsabbildung
$$D : K[x]^{\leq n} \to K[x]^{\leq n}, \quad a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$
ist linear.
(4) Es sei V der Vektorraum aller Fibonacci Folgen. Dann ist die Verschiebungsabbildung (c.f. Proposition 1.1.15) linear.
(5) Es sei $n \geq 1$ und $V = M_{n\times n}(K)$. Definiere die Spur-Abbildung
$$\mathrm{Tr} : V \to K, \qquad A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$
Dann ist Tr linear.

Das folgende Beispiel zeigt, dass Matrizen eine wichtige Quelle von linearen Abbildungen sind.

Definition 4.1.4. *Es seien $m, n \geq 1$ und $A \in M_{m\times n}(K)$. Definiere die Abbildung*
$$T_A : K^n \to K^m, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.1.5. *Die Abbildung T_A ist linear.*

Proof. Uebung. □

Bemerkung 4.1.6. *Eine Abbildung $T : V \to W$ ist genau dann linear, wenn*
$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$
fuer alle $v_1, v_2 \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.

Satz 4.1.7. *Es seien V, W Vektorraeume ueber K und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.*

(i) Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Dann gilt
$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$
(ii) Es gilt $T(0_V) = 0_W$).

Proof. (i) ist klar.
(ii) Es gilt
$$T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_W,$$
wobei die letzte Gleichung von Satz 3.1.6 (2) folgt. □

Korollar 4.1.8. *Es seien V, W Vektorraeume ueber K, V endlich-dimensional, und es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist T durch $T(v_1), \dots, T(v_n)$ eindeutig bestimmt.*[20]

[20] Mit anderen Worten, wenn wir $T(v_1), \dots, T(v_n)$ kennen, dann kennen wir auch $T(v)$ fuer alle $v \in V$.

Proof. Es sei $v \in V$. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist, schreiben wir v als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dann gilt aufgrund von Satz 4.1.7 (i)

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i),$$

was zu beweisen war. □

Tatsaechlich koennen wir auf diese Weise lineare Abbildungen konstruieren:

Theorem 4.1.9. *Es seien V, W Vektorraeume ueber K, V endlich-dimensional, mit Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es seien $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T : V \to W$ so dass*

$$T(v_i) = w_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Proof. Wir definieren die Abbildung T wie folgt: es sei $v \in V$. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist, koennen wir v eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ schreiben. Wir definieren

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$$

Dann ist T wohl-definiert, da die Linearkombination eindeutig ist, und bei Definition gilt $T(v_i) = w_i$.

Ueberpruefen wir, dass T linear ist:

- Wenn $v, v' \in V$, schreiben wir

  $$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \qquad \text{und} \qquad v' = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i.$$

  Dann gilt

  $$\begin{aligned} T(v + v') &= T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i \\ &= T(v) + T(v'). \end{aligned}$$

- Wenn $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ und $\beta \in K$, dann gilt

  $$\begin{aligned} T(\beta v) &= T\left(\beta \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta \alpha_i w_i \\ &= \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \\ &= \beta\, T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \\ &= \beta\, T(v). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von T folgt von Korollar 4.1.8. □

Warnung. Das Theorem ist im Allgemeinen falsch, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem aber nicht liienar unabhaengig ist. Betrachte z.B. das Erzeugendensystem $e_1, e_2, e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^2$. Gibt es eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die jeden dieser Vektoren auf 1 abbildet? Nein, denn

$$0 = T(0_{\mathbb{R}^2}) = T(e_1 + e_1 - (e_1 + e_2)) = T(e_1) + T(e_2) - T(e_1 + e_2) = 1,$$

was einen Widerspruch ergibt.

Noch eine weitere Eigenschaft von linearen Abbildungen ist wichtig: lineare Abbildungen lassen sich verknuepfen.

Lemma 4.1.10. *Es seien $T : V \to U$ und $S : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist die Abbildung*

$$S \circ T : V \to W$$

ebenfalls linear.

Proof. Uebung. $\square$

4.2. **Kernel and Image.**

Definition 4.2.1. *Es seien V, W Vektorraeume ueber K, und es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.*

(1) Der Kern von T ist
$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V.$$
(2) Das Bild von T is
$$\operatorname{im}(T) = \{T(v) : v \in V\} \subseteq W.$$

Beispiele 4.2.2.

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, und es sei $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die dazugehoerige lineare Abbildung (Definition 4.1.4). Was ist $\ker(T_A)$? Per Definition ist
$$\ker(T_A) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : Ax = 0_{\mathbb{R}^3} \right\},$$
d.h. $\ker(T_A)$ ist die Loesung eines linearen Gleichungssystems. Wir haben die Loesung dieses Gleichungssystems bereits in Beispiel 3.3.5 bestimmt: die Loesung ist
$$\ker(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Was ist $\operatorname{im}(T_A)$? Laut Definition ist
$$\operatorname{im}(T_A) = \left\{ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \exists\, x \in \mathbb{R}^3 \text{ so dass } A.x = b \right\}.$$
Auch dieses haben wir in Beispiel 3.3.5 bereits bestimmt: $b \in \operatorname{im}(T_A)$ genau dann, wenn $b_3 = 2b_2 + b_1$, mit anderen Worten
$$\operatorname{im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(2) Es sei nun $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, und es sei $T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die dazugehoerige lineare Abbildung. Eine einfache Rechung zeigt, dass
$$\ker(T_B) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Lemma 4.2.3.

(1) $\ker(T)$ *ist ein Unterraum von V.*
(2) $\operatorname{im}(T)$ *ist ein Unterraum von W.*

Proof. Wir benutzen Satz 3.2.2.

(1) Es folgt von Satz 4.1.7, dass $T(0_V) = 0_W$, d.h. $0_V \in \ker(T)$. Es seien nun $u, v \in \ker(T)$ und $\lambda \in K$. Da T linear ist, gilt
$$T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v) = 0_W + \lambda 0_W = 0_W,$$
d.h. $u + \lambda v \in \ker(T)$.

(2) Da $T(0_V) = 0_W$, sehen wir, dass $0_W \in \operatorname{im}(T)$. Es seien nun $w_1, w_2 \in \operatorname{im}(T)$; dann gibt es $v_1, v_2 \in V$, so dass $T(v_i) = w_i$ fuer $i = 1, 2$. Es sei nun $\lambda \in K$. Dann gilt
$$w_1 + \lambda w_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2) = T(v_1) + T(\lambda v_2) = T(v_1 + \lambda v_2),$$
d.h. $w_1 + \lambda w_2 \in \operatorname{im}(T)$. □

Beispiel 4.2.4. Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und wir betrachen das homogene lineare Gleichungssystem
$$S : Ax = 0_{K^m}.$$
Dann ist $L(S) = \ker(T_A)$ ein Unterraum von K^n.

Satz 4.2.5. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn V endlich-dimensional ist, dann sind auch $\ker(T)$ und $\operatorname{im}(T)$ endlich-dimensional.*[21]

Proof. Die Aussage fuer $\ker(T)$ folgt von Satz 3.4.2.

Um die Aussage fuer $\operatorname{im}(T)$ zu beweisen, benutzen wir Korollar 4.1.8: es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann folgt aus dem Korollar, dass $T(v_1), \dots, T(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(T)$ ist. Daher ist $\operatorname{im}(T)$ endlich-dimensional. □

Der Kern von T zeigt an, ob T eine injektive Abbildung ist:

Satz 4.2.6. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorraeumen. Dann ist T genau dann injectiv, wenn $\ker(T) = \{0_V\}$.*

Proof. $\Rightarrow$: klar von der Definition. Lecture 12

$\Leftarrow$: nimm an, dass $T(v) = T(u)$ fuer $u, v \in V$. Dann gilt

$$T(u) - T(v) = 0_W \qquad \Leftrightarrow \qquad T(u - v) = 0_W,$$

d.h. $u - v \in \ker(T)$. Wenn $\ker(T) = \{0_V\}$, dann folgt daraus, dass $u = v$, mit anderen Worten T ist injectiv. □

Beispiel 4.2.7. Die Abbildung T_B aus Beispiel 4.2.2 (2) ist injektiv; die Abbildund T_A aus dem gleichen Beispiel (1) ist nicht injektiv.

Definition 4.2.8. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung mit V endlich-dimensional. Der Rang $\operatorname{rk}(T)$ von T ist $\dim_K \operatorname{im}(T)$.*

Der folgende Satz bringt $\operatorname{rk}(T)$ und die Dimension von $\ker(T)$ miteinander in Verbindung:

Theorem 4.2.9. *Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorraeume ueber K, und es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim_K V = \dim_K \ker(T) + \operatorname{rk}(T).$$

Proof. Es sei $u_1, \dots, u_n$ einen Basis fuer $s \ker(T)$. Aufgrund von Theorem 3.3.19 koennen wir es zu einer Basis $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r$ fuer V erweitern (d.h. $\dim_K V = n + r$). Behauptung: $w_1, \dots, w_r$ ist eine Basis von $\operatorname{im}(T)$.

Aufgrund von Korollary 4.1.8 ist T durch $T(u_1), \dots, T(u_n), T(v_1), \dots, T(v_r)$ eindeutig bestimmt. Da $T(u_i) = 0_W\ \forall\, 1 \le i \le n$, folgern wir, dass $T(v_1), \dots, T(v_r)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(T)$ ist.

Fuer $1 \le i \le r$ sei $w_i = T(v_i)$. Wie ueberpruefen lineare Unabhaengigkeit: nimm an, dass

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r = 0_V \qquad \Leftrightarrow \qquad T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) = 0_V.$$

Dann ist $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \ker(T)$, d.h. es gibt $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ so dass

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = v.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r - (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n) = 0_V.$$

Da die Vektoren linear unabhaengig sind, folgt, dass

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Insbesondere sind $w_1, \dots, w_r$ linear unabhaengig. □

Korollar 4.2.10. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorraeumen. Dann gilt:*

(1) Wenn $\dim W < \dim V$, dann ist T nicht injektiv.
(2) Wenn $\dim W > \dim V$, dann ist T nicht surjektiv.
(3) Wenn $\dim W = \dim V$, dann sind folgende Aussagen aequivalent: T bijectiv $\Leftrightarrow$ T ist injectiv $\Leftrightarrow$ T ist surjectiv.

[21] Wie nehmen hier *nicht* an, dass W endlich-dimensional ist.

Proof. (1) Da $\operatorname{im}(T) \leq W$, gilt $\operatorname{rk}(T) \leq \dim W$. Daraus folgt, dass

$$\dim \ker(T) = \dim V - \operatorname{rk}(T) \geq \dim V - \dim W > 0$$

und T ist nicht injektiv (Satz 4.2.6).

(2) Aus Theorem 4.2.9 folgt, dass

$$\operatorname{rk} \operatorname{im}(T) = \dim V - \dim \ker(T) \leq \dim V < \dim W,$$

so dass T nicht surjectiv sein kann.

(3)

$$\begin{aligned} T \text{ ist injektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \ker(T) = \{0_V\} \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rk}(T) = \dim V \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rk}(T) = \dim W \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{im}(T) = W \\ &\Leftrightarrow \quad T \text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

□

Beispiele 4.2.11.

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die lineare Abbildung T_A nicht injektiv. Is sie surjektiv?

(2) Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist T_B bijektiv: wir haben in Beispiel 2.3.3 gesehen, dass B zeilen-aequivalent ist zu der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daher ist $0_{\mathbb{R}^3}$ die einzige Loesung des homogenen linearen Gleichungssystems $B.x = 0_{\mathbb{R}^3}$, d.h. $\ker(T_B) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Folgende Beobachtung ist eine einfache Folgerung von Theorem 4.2.9:

Korollar 4.2.12. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $T : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gilt fuer jeden Unterraum U von V*

$$\dim_K U = \dim_K T(U).$$

Definition 4.2.13. *Eine lineare Abbildung $T : V \to W$ ist ein* Isomorphismus*, wenn es eine lineare Abbildung $S : W \to V$ gibt, so dass*

$$S \circ T = \mathrm{id}_V \qquad \textit{und} \qquad T \circ S = \mathrm{id}_W;$$

in diesem Fall schreiben wir $S = T^{-1}$.

Wir sagen, dass V und S isomorph *sind, wenn es einen Isomorphismus $T : V \to W$ gibt; in diesem Fall schreiben wir $V \cong W$.*

Bemerkung 4.2.14. *Es sei X die Menge aller Vektorraeume ueber K. Dann ist "$\cong$" eine Aequivalenzrelation auf X.*

Beispiel 4.2.15. Es sei $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$. Es sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann koennen wir dank Theorem 4.1.9 folgendermassen eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}^3$ konstruieren: wir wissen, dass $1, x, x^2$ eine Basis von V ist. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T : V \to \mathbb{R}^3$ fuer die gilt

$$T(1) = e_1, \qquad T(x) = e_2, \qquad T(x^2) = e_3.$$

Um zu zeigen, dass T ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse lineare Abbildung: Definiere $S : \mathbb{R}^3 \to V$ durch

$$S : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a + bx + cx^2.$$

Dann ist klar, dass $S \circ T = \mathrm{id}_V$ und $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Beispiel 4.2.16. Es sei V der reelle Vektorraum aller Fibonacci-Folgen. Dann definiert die Abbildung $\mathcal{F}_{a,b} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ einen Isomorphismus $V \cong \mathbb{R}^2$.

Bemerkung 4.2.17. *Ein Isomorphismus $T : V \to V$ wird auch* Automorphismus *genannt.*

Bemerkung 4.2.18. *Wir koennen den Beweis von Theorem 4.2.9 folgendermassen interpretieren: es sei X ein Komplement von $\ker(T)$ in V. Dann induziert die Abbildung $T : V \to W$ einen Isomorphismus $T : X \cong \mathrm{im}(T)$.*

Frage. Ist jede lineare Bijektion $T : V \to W$ ein Isomorphismus?

Lemma 4.2.19. *Es sei $T : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist die inverse Abbildung $T^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear, d.h. jede bijektive lineare Abbildung ist automatisch ein Isomorphismus.*

Proof. Es seien $w_1, w_2 \in W$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Dank Bemerkung 4.1.6 muessen wir zeigen, dass

$$T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2^{-1} T^{-1}(w_2).$$

Fuer $i = 1, 2$ sei $v_i = T^{-1}(w_i)$. Da T linear ist, gilt

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2.$$

Wenden wir T^{-1} auf diese Gleichung an, dann folgt, dass

$$T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2).$$

□

Beispiel 4.2.20. Um zu zeigen, dass die Abbildung T in Beispiel 4.2.15 ein Isomorphismus ist, reicht es daher zu zeigen, dass sie bijektiv ist. Nun zeigt eine einfache Rechnung, dass $\ker(T) = \{0_V\}$, daher ist T bijektiv aufgrund von Korollar 4.2.10 (3).

Lecture 13

Beispiel 4.2.21. Die Abbildung T_B aus Beispiel 4.2.11 ist also ein Isomorphismus. Was ist die inverse lineare Abbildung?

Folgendes Theorem ist sehr wichtig: es klassifiziert alle n-dimensionalen K-Vektorraeume.

Theorem 4.2.22. *Es seien V, W n-dimensionale K-Vektorraeume. Dann gilt $V \cong W$.*

Proof. Waehle jeweilige Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ von V und W. Aus Theorem 4.1.9 folgt, dass es eine lineare Abbildung $T : V \to W$ gibt, so dass $T(v_i) = w_i \ \forall 1 \leq i \leq n$. Dann ist T surjectiv: wenn $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in W$, dann gilt

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Es folgt von Korollar 4.2.10, dass T bijektiv ist und daher dank Lemma 4.2.19 ein Isomorphismus. □

Bemerkung 4.2.23. *Insbesondere ist jeder n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n.*

4.3. **Lineare Abbildungen als Matrizen.**

Definition 4.3.1. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorraeumen, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von V, bzw. von W. Die* Abbildungsmatrix *von T bezueglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist die Matrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, deren Eintraege definiert sind durch*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

Mit anderen Worten, die Eintraege in der Spalte j sind die Skalare, die wir erhalten, wenn wir Tv_j als Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ schreiben.

Beispiele 4.3.2. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(1) Die Abbildungsmatrix der Null-Abbildung bezueglich jeder Basis ist die Nullmatrix.
(2) Die Abbildungsmatrix der Identitaetsabbildung bezueglich der Basis $\mathcal{B}$ ist die Einheitsmatrix: $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_n$.

Beispiel 4.3.3. Es seien nun $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ und $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, mit jeweiligen Standardbasen $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathcal{E}' = (1, x, x^2)$. Wir betrachten die Ableitungsabbildung $D : V \to W$. Dann ist

$$[D]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4.3.4. Es sei V der Vektorraum aller Fibonacci-Folgen und $S : V \to V$ die Verschiebungs-Abbildung. Es sei $\mathcal{B}$ die Basis $(\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{0,1})$. Dann ist

$$[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $\mathcal{C}$ die Basis $(\mathcal{F}_{1,\varphi}, \mathcal{F}_{1,\psi})$. In dieser Basis hat S eine besonders schoene Form: sie ist diagonal.

$$[S]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Wie haengen die beiden Matrizen zusammen? Wir werden diese Frage in Abschnitt 4.5 untersuchen.

Bemerkung 4.3.5. *Mit Hilfe der Abbildungsmatrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ koennen wir sehr leicht berechnen, wohin ein Vektor $v \in V$ abgebildet wird. Schreibe v als Linearkombination der basis $\mathcal{B}$: $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, und es sei*

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \beta_j T(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_j \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j \right) \cdot w_i \\ &= \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.6. Zurueck zu Beispiel 4.3.3. Was ist das Bild von einem beliebigen Element $v \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ unter der Abbildung D? Schreibe v als Linearkombination der Basis $\mathcal{E}$: $v = a + bx + cx^2 + dx^3$. Dann gilt

$$D(v) = aD(1) + bD(x) + cD(x^2) + dD(x^3),$$

mit anderen Worten, wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix},$$

und dieses sind genau die Koordinaten von $D(v)$ in der Basis $\mathcal{E}'$: $D(v) = b + 2cx + 3dx^2$.

Hier ist noch ein Beispiel: Betrachte K-Vektorraeume V und W mit jeweiligen Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$. Es sei $T : V \to W$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} Tv_1 &= 2w_2 - w_3 \\ Tv_2 &= w_1 - w_2 - w_3. \end{aligned}$$

Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Was ist $T(v)$ fuer $v = av_1 + bv_2 \in V$? Laut Bemerkung 4.3.5 berechnen wir

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2a - b \\ -a - b \end{pmatrix},$$

das heisst,

$$T(av_1 + bv_2) = bw_1 + (2a - b)w_2 + (-a - b)w_3.$$

Dank der Abbildungsmatrix koennen wir die Verknuepfung von linearen Abbildungen mit Hilfe von Matrizen darstellen:

Satz 4.3.7. *Es seien V, W und U drei endlich-dimensionale Vektorraeume ueber K mit jeweiligen Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ und $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$. Es seien $T : V \to W$ und $S : W \to U$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

$$[S \circ T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}},$$

wobei $\cdot$ die Matrix-Multiplikation bezeichnet.

Proof. Schreibe

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K), \quad (b_{ij}) = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in M_{p\times m}(K), \quad (c_{ij}) = [S \circ T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \in M_{p\times n}(K).$$

Dann gilt aufgrund der Definition der Darstellungsmatrizen durch

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m, \tag{17}$$

$$S(w_i) = b_{1i}u_1 + \cdots + b_{pi}u_p, \tag{18}$$

$$(S \circ T)(v_j) = c_{1j}u_1 + \cdots + c_{pj}u_p \tag{19}$$

gegeben. Aber $(S \circ T)(v_j)$ ist ebenfalls gegeben durch

$$\begin{aligned} (S \circ T)(v_j) &= S(T(v_j)) \\ &= S\left(a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m\right) \\ &= a_{1j}S(w_1) + \cdots + a_{mj}S(w_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}S(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{ki}u_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{ki}u_k, \end{aligned}$$

das heisst $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$, was genau der Wert an der Stelle (k, j) der Matrix $[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist. Quod erat demonstrandum. □

4.4. **Matrizen als Lineare Abbildungen.**

Bemerkung 4.4.1. *Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorraeume mit jeweiligen Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$. Wir haben bereits gesehen, dass jede lineare Abbildung $T : V \to W$ eine Abbildungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ hat.*

Umgekehrt koennen wir aus einer Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ eine lineare Abbildung $L_A : V \to W$ konstruieren: wir definieren L_A als die lineare Abbildung $V \to W$, fuer die gilt

$$L_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Wichtig: *Die lineare Abbildung L_A haengt ebenfalls von der Wahl der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ab!*

Bemerkung 4.4.2. *In dem Spezialfall, dass $V = K^n$, $W = K^m$ und $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ die jeweiligen Standardbasen sind, ist L_A die lineare Abbildung T_A aus Beispiel 4.1.4.*

Lemma 4.4.3. *Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorraeume mit jeweiligen Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$.*

1. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $L_{[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}} = T$.*
2. *Es sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt $[L_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$: die Abbildungsmatrix bezueglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist A selber.*

Proof. Klar von den Definitionen.[22] □

Bemerkung 4.4.4. *Wir koennen Lemma 4.4.3 folgendermassen zusammenfassen: es gibt eine $1:1$-Korrespondenz*

$$\begin{aligned} &\{m \times n\text{-Matrizen mit Werten in } K\} &\leftrightarrow\quad& \{\text{lineare Abbildungen } V \to W\} \qquad (20)\\ &A &\mapsto\quad& L_A \qquad (21)\\ &[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &\leftarrow\!\shortmid\quad& T \qquad (22)\end{aligned}$$

Wichtig: diese $1:1$ Korrespondenz haengt von der Wahl der Basen von V und W ab – sie ist* nicht *kanonisch.

Satz 4.4.5. *Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Es sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist T genau dann ein Isomorphismus, wenn $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ eine invertierbare Matrix ist. In diesem Fall ist die Abbildungsmatrix von T^{-1} bezueglich der Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$.*

Proof. $\Rightarrow$ Nimm an, dass T ein Isomorphismus ist, d.h. es gibt eine lineare Abbildung $T^{-1} : V \to V$ so dass

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V .$$

Dann gilt aufgrund von Satz 4.3.7, dass

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_n = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}},$$

das heisst $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist die inverse Matrix von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

$\Leftarrow$ Nimm an, dass $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar ist, d.h. es gibt eine Matrix A^{-1}, so dass Lecture 14

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}_n.$$

Dann ist $L_{A^{-1}}$ die inverse Abbildung zu T: aufgrund von Satz 4.3.7 gilt

$$[L_{A^{-1}} \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [L_{A^{-1}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}_n = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}},$$

wobei die zweite Gleichung von Lemma 4.4.3 (2) folgt. Daher gilt $L_{A^{-1}} \circ T = \mathrm{id}_V$. Auf aehnliche Weise koennen wir zeigen, dass $T \circ L_{A^{-1}} = \mathrm{id}_V$. Daher ist T ein Isomorphismus. □

---

[22] Um (1) zu zeigen, weisen Sie nach, dass fuer alle $1 \leq j \leq n$ gilt $L_{[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}}(v_j) = T(v_j)$. Fuer (2) berechnen sie den (i, j) Eintrag der Matrix $[L_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und zeigen, dass es gleich dem (i, j) Eintrag von A ist.

4.5. **Basiswechsel.** Wir wollen nun folgende Frage untersuchen: es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorraeumen, und es seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$, bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m')$ und $\mathcal{C}' = (w_1', \dots, w_m')$ zwei verschidene Basen von V, bzw. von W. Was ist die Beziehung zwischen den Matrizen $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$?

Definition 4.5.1. *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Es sei $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ eine andere Basis von V, und es sei $A = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, d.h. $A = (a_{ij})$ ist die Matrix, deren Eintraege definiert sind durch die Gleichungen*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i' \qquad \textit{fuer } 1 \le j \le n.$$

Die Matrix A heisst Basiswechselmatrix *von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.*

Bemerkung 4.5.2. *Wir koennen mit Hilfe der Basiswechselmatrix $A = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ eine Linearkombination bezueglich der Basis $\mathcal{B}$ als eine Linearkombination bezueglich der Basis $\mathcal{B}'$ ausdruecken: es sei $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$. Dann gilt*

$$v = \beta_1 v_1' + \dots + \beta_n v_n',$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Satz 4.5.3. *Die Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ ist invertierbar, mit Inversem*

$$\left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Proof. Von Theorem 4.3.7 folgt, dass

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_n = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \circ [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$
$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{1}_n = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \circ [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

□

Beispiel 4.5.4. Es sei $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, und es sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir koennen natuerlich auch die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ betrachten: es gilt

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir ueberpruefen Satz 4.5.3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.5.5. *Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorraeumen, und es seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$, bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ und $\mathcal{C}' = (w_1', \dots, w_m')$ zwei verschidene Basen von V, bzw. von W. Dann gilt*

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Proof. Das Theorem folgt durch mehrfache Anwendung von Satz 4.3.7.

Alternativ koennen Sie ovn den Definitionen argumentieren: let $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, $P = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ and $Q = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$. Diese Matrizen sind durch folgende Eigenschaften definiert (vergl. Definition 4.3.1 und Beispiel 4.3.2 (3)):

$$v_\ell' = p_{1\ell} v_1 + \dots + p_{n\ell} v_n,$$
$$T(v_k) = a_{1k} w_1 + \dots + a_{mk} w_m,$$
$$w_j = q_{1j} w_1' + \dots + q_{mj} w_m'$$

fuer alle $1 \leq k, \ell \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(v'_\ell) &= \sum_{k=1}^{n} p_{k\ell} T(v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{k\ell} a_{jk} w_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} p_{k\ell} a_{jk} q_{ij} w'_i \qquad (23) \end{aligned}$$

Aber $B = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$ ist die Matrix mit der Eigenschaft, dass

$$T(v_{\ell'}) = b_{1\ell} w'_1 + \cdots + b_{m\ell} w'_m.$$

Indem wir die Formeln (23) und (24) vergleichen, erhalten wir

$$b_{i\ell} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{k\ell} a_{jk} q_{ij}. \qquad (24)$$

□

Bemerkung 4.5.6. *Wir koennen Theorem 4.5.5 folgendermassen zusammenfassen: $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorraeumen, und es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, bzw. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zwei verschidene Basen von V, bzw. von W. Dann gibt es invertierbare Matrizen $P \in M_{n\times n}(K)$ und $Q \in M_{m\times m}(K)$, so dass*

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = Q \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot P.$$

Hier ist P die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ und Q die Basiswechselmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$.

Als Spezialfall erhalten wir einen Formel fuer die Matrix eines Endomorphismus nach Basiswechsel:

Korollar 4.5.7. *Es sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus, und es seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ Basen von V. Es sei $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Dann gilt*

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Beispiel 4.5.8. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, und wir betrachten die Abbildung $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mit anderen Worten, wenn $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, dann gilt

$$A = [T_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}.$$

Es sei nun $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (vergl. Beispiel 4.5.4). Was ist die Matrix von T_A bezueglich der Basis $\mathcal{B}$? Es gilt

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Von Korollar 4.5.7 erhalten wir

$$[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot [T_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix bedeutet, dass

$$T_A : v_1 \mapsto -3v_1 + 2v_2 \qquad \text{und} \qquad T_A : v_2 \mapsto -10v_1 + 4v_2.$$

Beispiel 4.5.9. Wir koennen jetzt einige der Rechnungen mit Fibonacci Folgen besser verstehen: es seien $\mathcal{B} = (\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{0,1})$ und $\mathcal{C} = (\mathcal{F}_{1,\varphi}, \mathcal{F}_{1,\psi})$ Basen des Raumes V von Fibonacci-Folgen, und es sei $S : V \to V$ die Verschiebungsabbildung. Wir haben bereits gesehen, dass

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ ist gegeben durch

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \varphi \end{pmatrix}$$

mit inverser Matrix

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix},$$

wie erwartet. (Rechnen Sie nach!)

Definition 4.5.10.

(1) Zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ sind aehnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

(2) Zwei Matrizen $A, B \in M_{m\times n}(K)$ sind äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen $P \in M_{m\times m}(K)$ und $Q \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass*

$$B = P \cdot A \cdot Q.$$

Beispiele 4.5.11.

(1) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ aus Beispiel 4.5.9 sind aehnlich.

(2) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sind aequivalent, weil

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.5.12.

(1) 'Aehnlichkeit' definiert eine Aequivalenzrelation auf $M_{n\times n}(K)$.

(2) 'Äquivalenz' definiert eine Aequivalenzrelation auf $M_{m\times n}(K)$.

Proof. Wir beweisen (1); der Beweis von (2) isteine Uebung. Schreibe $A \sim B$ wenn A aehnlich zu B ist. Lecture 15

- Es gilt $A \sim A$, da $A = \mathbf{1}_n^{-1} A\, \mathbf{1}_n$.
- Wenn $A \sim B$, dann gilt

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \Rightarrow \qquad A = (P^{-1})^{-1} B\, P^{-1},$$

  und daher $B \sim A$.
- Wenn $A \sim B$ und $B \sim C$, dann gibt es invertierbare Matrizen P, Q so dass

$$B = P^{-1} A\, P \qquad \text{und} \qquad C = Q^{-1} B\, Q,$$

  woraus folgt, dass

$$C = Q^{-1} P^{-1} A\, P\, Q = (PQ)^{-1} A\, PQ,$$

  d.h. $A \sim C$.

$\square$

4.6. **Eine Bemerkung zu Koordinaten.** Viele von Ihnen haben wahrscheinlich in der Schule gelernt, dass ein Vektor gleichbedeutend ist mit einem Spaltenvektor. Das ist allerdings nur bedingt richtig. Richtig ist: die Menge aller Spaltenvektoren der Laenge n mit Koeffizienten in einem Koerper K ist ein Vektorraum, naemlich K^n. Allerdings gibt es noch viele andere Vektorraeume.

Ein *Vektor* ist zunaechst nur ein Element u eines Vektorraums V. **Nachdem** wir eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ gewaehlt haben, koennen wir u einen Spaltenvektor zuordnen: schreibe u als Linearkombination bezueglich der Basis,

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad \alpha_i \in K \,\forall\, 1 \le i \le n.$$

Dann sind die Eintraege des Vektors $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ die *Koordinaten* von u bezueglich der gegebenen Basis. Wenn wir die Basis von V aendern, dann aendern sich natuerlich auch die Koordinaten von u: die neuen Koordinaten sind gegeben durch die Formel in 4.5.2.

Formal laesst sich das folgendermassen formulieren:

Satz 4.6.1. *Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Definiere*

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$

als die Abbildung, die einen Vektor auf seinen Koordinaten bezueglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet. Dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ ein nicht-kanonischer Isomorphismus.

Proof. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, laesst sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination der Basiselemente schreiben. Daher ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ injektiv. Um zu zeigen, dass sie surjektiv ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung: es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Definiere

$$\Psi_{\mathcal{B}} : K^n \to V,$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Daher ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ surjektiv und daher ein Isomorphismus aufgrund von Lemma 4.2.19. □

Wenn wir nun Vektorraeume V und W haben mit jeweiligen Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$, und es ist $A \in M_{m\times n}(K)$, dann koennen wir die lineare Abbildung $L_A : K^n \to K^m$ aus Bemerkung 4.4.1 folgendermassen mit der Abbildung $T_A : K^n \to K^m$ in Verbindung bringen: es gilt

$$L_A = \Psi_{\mathcal{C}} \circ T_A \circ \Phi_{\mathcal{B}},$$

das heisst, L_A ist definiert als die Komposition

$$V^{\Phi_{\mathcal{B}}} K^{n T_A} K^{m \Psi_{\mathcal{C}}} W.$$

4.7. **Zeilenrang gleich Spaltenrang.** Wir koennen jetzt den Satz aus Abschnitt 3.6 beweisen, naemlich dass fuer jede Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ gilt

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A). \tag{25}$$

Der Beweis erfordert etwas Vorbereitung. Wir beginninen mit folgenden Bemerkungen:

Bemerkung 4.7.1. *Von Definiton 4.1.4 wissen wir, dass wir von A eine lineare Abbildung $T_A : K^n \to K^m$ erhalten. Es seinen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ die jeweiligen Standardbasen von K^n und K^m. Dann folgt von Lemma 4.4.3* [23]*, dass*

$$[T_A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = A.]$$

Bemerkung 4.7.2. *Es gilt*

$$\text{im}(T_A) = \text{Spalten}(A)$$

und daher $\text{rk}(T_A) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Theorem 4.7.3. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und es sei $r = \text{Spaltenrang}(A)$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $P \in M_{n\times n}(K)$ und $Q \in M_{m\times m}(K)$, so dass QAP die Form $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s}\end{pmatrix}$ hat, wobei $s = n-r$ und $t = m - r$.*

Proof. Es sei $(u_1, \dots, u_s)$ eine Basis fuer $\ker(T_A)$. Wie in dem Beweis von Theorem 4.2.9 erweitern wir die Basis zu einer Basis

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$$

von K^n. Dein Einfachheit halber sei $v_{r+i} = u_i$ fuer $1 \le i \le s$, d.h.

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n).$$

Fuer $1 \le i \le r$ sei $w_i = L_A(v_i)$; dann ist $(w_1, \dots, w_r)$ eine Basis von $\text{im}(T_A)$. Wir erweitern diese Basis zu einer Basis

$$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$$

von K^m.

Was ist die Matrix von T_A bezueglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$? Schreiben wir $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = (c_{ij})$, dann gilt per Definition

$$T_A(v_j) = c_{1j}w_1 + \dots + c_{mj}w_m.$$

Nun wissen wir aber, dass

$$T_A(v_j) = \begin{cases} w_j & \text{fuer } 1 \le j \le r \\ 0_{K^m} & \text{fuer } r < j \le n \end{cases}$$

Mit anderen Worten,

$$[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s}\end{pmatrix}.$$

Nun wissen wir von Theorem 4.5.5, dass

$$[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [\text{id}_{K^m}]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{C}} \cdot [T_A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} \cdot [\text{id}_{K^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}.$$

Da $[T_A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = A$, erhalten wir das Resultat fuer $Q = [\text{id}_{K^m}]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{C}}$ und $P = [\text{id}_{K^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$. □

Dieses Theorem hat eine interessante Konsequenz: erinnern Sie sich (Def. 4.5.10 (2)), dass zwei Matrizen $A, B \in M_{m\times n}(K)$ aequivalent sind, wenn es invertierbare Matrizen $P \in M_{m\times m}(K)$ und $Q \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass

$$B = P \cdot A \cdot Q;$$

wir schreiben $A \sim B$.

Korollar 4.7.4. *Es seien $a, b \in M_{m\times n}(K)$. Dann sind A und B genau dann aequivalent, wenn* $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(B)$. *Insbesondere zerfaellt $M_{m\times n}(K)$ in $\min\{m, n\}+1$ Äquivalenzklassen.*

[23] weil T_A nichts anderes ist als die Abbildung $L_A : K^n \to K^m$ bezueglich der Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$.

Proof. $\Leftarrow$: Es sei r der gemeinsame Spaltenrang. By Theorem 4.7.3 gilt

$$a \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s} \end{pmatrix}.$$

Da '$\sim$' eine Aequialenzrelation ist (Proposition 4.5.12), folgt daraus, dass $A \sim B$.

$\Rightarrow$: Nimm an, dass $A \sim B$, d.h. es gibt invertierbare Matrizen $P \in M_{m\times m}(K)$, $Q \in M_{n\times n}(K)$ so dass $B = PAQ$. Dann gilt

$$T_B = T_P \circ T_A \circ T_Q,$$

wobei $T_\star$ die von $\star$ induzierte lineare Abbildung bezueglich der Einheitsbasen ist. Wir wollen zeigen, dass $\dim T_A = \dim T_B$. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(T_B) &= T_B(K^n) \\ &= T_P \circ T_A\left(T_Q(K^n)\right) \\ &= T_P \circ T_A(K^n) && \text{da } T_Q \text{ ein Isomorphismus ist} \\ &= T_P(\operatorname{im}(T_A)) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\dim \operatorname{im}(T_B) = \dim T_P\left(\operatorname{im}(T_A)\right),$$

Doch da T_P ein Isomorphismus ist, folgt von Korollar 4.2.12, dass

$$\dim T_P\left(\operatorname{im}(T_A)\right) = \dim \operatorname{im}(T_A).$$

□

Übung 4.7.5. *Koennen Sie die Aequivalenzklassen von aehnlichen Matrizen beschreiben?*

Um (25) zu zeigen, muessen wir nun beweisen, dass sich der Zeilen- bzw. Spaltenrang einer Matrix nicht aendern, wenn wir die Matrix von links, bzw. von rechts mit einer invertierbaren Matrix multiplizieren. Lecture 16

Satz 4.7.6. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und es sei $Q \in M_{m\times m}(K)$ invertierbar. Dann gilt*
(1) Zeilenrang(QA) = Zeilenrang(A)*;*
(2) Spaltenrang(QA) = Spaltenrang(A).

Proof. (1) Wir schreiben $Q = (q_{ij})$. Es seien $x_1, \dots, x_m$ die Zeilenvektoren von A. Dann ist die $i$te Zeile von QA gegeben durch

$$q_{i1}x_1 + \cdots + q_{im}x_m,$$

mit anderen Worten, die Zeilen von QA sind Linearkombinationen von den Zeilen von A und daher

$$\text{Zeilenrang}(QA) \le \text{Zeilenrang}(A).$$

Da Q invertierbar ist, koennen wir dieses Argument auch Multiplikation bei $Q^{-1}A$ anwenden und erhalten

$$\text{Zeilenrang}(Q^{-1}QA) \le \text{Zeilenrang}(QA),$$

das heisst Zeilenrang$(A) \le$ Zeilenrang(QA). Daraus folgt, dass

$$\text{Zeilenrang}(QA) = \text{Zeilenrang}(A).$$

(2) Es seien nun $y_1, \dots, y_n$ die Spalten von A, und es sei $U = \langle y_1, \dots, y_n\rangle \le K^m$. Dann sind die Spalten von QA gegeben durch $Qy_1, \dots, Qy_n$, das heisst durch $L_Q(y_1), \dots, L_Q(y_n)$, wobei $L_Q : K^m \to K^m$ die durch Q gegebene lineare Abbildung bezueglich der Standardbasis ist. Nun ist aber Q invertierbar, was bedeutet, dass L_Q ein Isomorphismus ist und insbesondere injektiv. Daher folgt von Korollar 4.2.12, dass

$$\dim_K U = \dim_K L_Q(U),$$

und daher

$$\text{Spaltenrang}(QA) = \text{Spaltenrang}(A).$$

□

Um das analoge Resultat fuer AP zu zeigen, benutzen wir einen Trick:

Definition 4.7.7. *Es sei $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$. Definiere die* transponierte Matrix *B^t als die $(n\times m)$-Matrix, deren (i,j) Eintrag durch b_{ji} gegeben ist.*

Bemerkung 4.7.8. *Mit anderen Worten, die Zeilen von B sind die Spalten von B^t und umgekehrt.*

Beispiel 4.7.9.

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lemma 4.7.10.

(1) Fuer einen Matrix $B \in M_{m\times n}(K)$ gilt $(B^t)^t = B$.

(2) Es sei $B \in M_{m\times n}(K)$ und $C \in M_{n\times p}(K)$. Dann gilt

$$(BC)^t = C^t B^t.$$

(3) Eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn B^t invertierbar ist, und in diesem Fall ist $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

(4) Es gilt

$$\text{Zeilenrang}(B) = \text{Spaltenrang}(B^t) \quad \textit{und} \quad \text{Zeilenrang}(B^t) = \text{Spaltenrang}(B)$$

Proof. Uebung. □

Wir koennen nun folgenden Satz als eine einfache Konsequenz von Satz 4.7.6 beweisen.

Satz 4.7.11. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und es sei $P \in M_{n\times n}(K)$ invertierbar. Dann gilt*

(1) $\text{Zeilenrang}(AP) = \text{Zeilenrang}(A)$*;*

(2) $\text{Spaltenrang}(AP) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Proof. Dank Lemma 4.7.10 (4) ist es ausreichend, den Satz in dem Fall zu zeigen, wenn wir AP durch $(AP)^t$, bzw. A durch A^t ersetzen. Aber

$$(AP)^t = P^t A^t,$$

und P^t ist invertierbar dank Lemma 4.7.10 (2) und (3). Der Satz folgt nun von Satz 4.7.6. □

Korollar 4.7.12. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und es seien $Q \in M_{m\times m}(K)$ und $P \in M_{n\times n}(K)$ invertierbar. Dann gilt*

$$\text{Zeilenrang}(QAP) = \text{Zeilenrang}(A) \qquad \textit{und} \qquad \text{Spaltenrang}(QAP) = \text{Spaltenrang}(A).$$

Folgender Satz ist nun eine einfache Konsequenz:

Theorem 4.7.13. *Es sei $A \in M_{m\times n}$. Dann gilt*

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A).$$

Proof. Wir haben in Theorem 4.7.3 gesehen, dass es invertierbare Matrizen $P \in M_{n\times n}(K)$ und $Q \in M_{m\times m}(K)$ gibt, so dass QAP die Form $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s} \end{pmatrix}$ hat, wobei $s = n - r$ und $t = m - r$. Der Zeilen- und Spaltenrang dieser Matrix ist offensichtlich r. Dank Korollary 4.7.12 wissen wir, dass die Matrix QAP den gleichen Zeilen-. bzw. Spaltenrang hat wie A. □

Definition 4.7.14. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Der gemeinsame Wert von Zeilen- und Spaltenrang von A ist der* Rang $\text{rk}(A)$ *von A.*

Bemerkung 4.7.15. *Obwohl fuer $A \in M_{m\times n}(K)$ gilt*

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A),$$

sind die Raeume $\text{Spalten}(A)$ *und* $\text{Zeilen}(A)$ *verschieden! Zunaechst ist* $\text{Spalten}(A) \leq K^m$ *und* $\text{Zeilen}(A) \leq K^n$. *Aber auch wenn $m = n$ erhalten wir im allgemeinen verschiedene Unterraeume von K^n.*

4.8. **Zurueck zu linearen Gleichungssystemen.** Es sei $A \in M_{m\times n}$, und wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$(S_A):\ A.x = 0_{K^m}.$$

Wir schreiben $L(S_A) \leq K^n$ fuer die Loesungen des Gleichungssystems.

Lemma 4.8.1. *Es gilt*

$$\dim L(S_A) = n - \mathrm{Rang}(A).$$

Proof. Es sei T_A die durch A gegebene lineare Abbildung $K^n \to K^m$ bezueglich der Standardbasen. Beachte (Bemerkung 4.7.2), dass $L(S_A) = \ker(T_A)$ und $\mathrm{Rang}(A) = \dim \mathrm{im}(T_A)$. Aber aufgrund von Theorem 4.2.9 gilt

$$n = \dim \ker(T_A) + \dim \mathrm{im}(T_A).$$

□

Wir wissen nun von Theorem 2.3.9, dass A zeilen-aequivalent ist zu einer Matrix $A' = (a'_{ij})$ in reduzierter Zeilenstufenform, und dank Theorem 2.4.5 gilt

$$L(S_A) = L(S_{A'}).$$

Wir wir bereits im Beweis von Lemma 3.6.6 gesehen haben, ist $r = \mathrm{Rang}(A')$ die Anzahl der fuehrenden Einsen von A'; nimm an, dass sie in den Spalten

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n.$$

auftreten. Die Loesungsmenge $L(S_{A'})$ hat dann $\ell = n - r$ freie Variablen, sagen wir $x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}$ fuer

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n.$$

Bemerkung 4.8.2. *Fuer alle Werte der freien Variablen $x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell} \in K$ sind die Werte der Variablen $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ eindeutig bestimmt, und zwar durch*

$$x_{j_k} = - \sum_{1\leq q\leq \ell:\ i_q > j_k} a'_{k,q} x_{i_q}. \tag{26}$$

Wir erhalten daher eine Abbildung

$$\Phi:\ K^\ell \to L(S_A),$$

die ein ℓ-Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ auf diejenige eindeutige Loesung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L(S_A) = L(S_{A'})$$

abbildet, fuer die gilt

$$x_{i_1} = \lambda_1, \dots, x_{i_\ell} = \lambda_\ell.$$

Beispiel 4.8.3. Es sei $A' \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist A' in reduzierter Zeilenstufenform, und es gilt $r =$ und $\ell = 6 - 3 = 3$. Die fuehrenden Einsen sind in den Spalten $j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$, das heisst, fuer $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in L(S_{A'})$ haben wir freie Variablen x_1, x_3, x_6, und die Werte von x_2, x_4, x_5 sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 - 2x_6 \\ x_4 &= x_6 \\ x_5 &= -x_6 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to L(S_{A'})$ ist gegeben durch

$$(a,b,c) \mapsto x = \begin{pmatrix} a \\ b-2c \\ b \\ c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.8.4. *The Abbildung Φ ist linear und ein Isomorphismus.*

Proof. Gleichung (26) zeigt, dass $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ linear von den freien Variablen abhaengen; daher ist Φ eine lineare Abbildung.

Um zu zeigen, dass Φ ein Isomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass $\ker(\Phi) = \{0_{k^\ell}\}$. Aber das folgt unmittelbar von der Definition von Φ: wenn $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = 0_{K^m}$, dann folgt $\lambda_i = 0$ for all i, da jedes λ_i ein Eintrag in $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ ist. □

Beispiel 4.8.5. Bezogen auf Beispiel 4.8.3 heisst das, dass jedes Element $x \in L(S_{A'})$ von der Form

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

fuer igendwelche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung 4.8.6. *Die inverse Abbildung Φ^{-1} ist folgendermassen gegeben: es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L(S_A)$.*

Dann gilt

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_\ell} \end{pmatrix}.$$

Lecture 17

Korollar 4.8.7. *Es seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$, und schreibe $(S_{A,b})$ fuer das lineare Gleichungssystem $A.x = b$.*

(1) Es gilt $L(S_{A,b}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $b \in$ Spalten*.*
(2) Wenn $L(S_{A,b}) \neq \emptyset$ und $y \in L(S_{A,b})$, dann gilt

$$L(S_{A,b}) = y + L(S_A) = \{x + y : x \in L(S_A)\}.$$

Proof. (1) Es seien $y_1, \dots, y_n$ die Spalten von A. Dann gilt fuer einen beliebigen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$A.x = x_1 y_1 + \cdots + a_n y_n,$$

das heisst, $\mathrm{im}(L_A) = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$.

(2) Es sei $y \in L(S_{A,b})$ und $z \in L(S_A)$. Dann gilt

$$A(y+z) = A.y + A.z = b + 0_{K^m} = b,$$

so dass $y + z \in L(S_{A,b})$.

Wenn umgekehrt $y' \in L(S_{A,b})$, dann gilt

$$A(y - y') = A.y - A.y' = b - b = 0_{K^m},$$

mit anderen Worten $y' \in y + L(S_A)$. □

Bemerkung 4.8.8. *Wir sehen also: $L(S_{A,b})$ ist gegeben durch die Verschiebung des Unterraums $L(S_A)$ entlang y. Eine Untermenge von K^n der Form $y + L(S_A)$ ist die* durch y erzeugte Nebenklasse *(eng. coset) von $L(S_A)$. Sie werden solchen Nebenklassen in der Algebra noch oft begegnen, zum Beispiel als die Elemente von Quotientenraeumen.*

Satz 4.8.9. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$, und es sei $A|b$ die erweiterte Matrix. Folgende Bedingungen sind aequivalent:*

(1) *Es gilt* $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A)$.

(2) *Das lineare Gleichungssystem*
$$S_{A,b} :\ A.x = b$$
hat eine Loesung.

Proof. Es seien $y_1, \ldots, y_n$ die Spaltenvektoren von A. Dann gilt
$$\begin{aligned} & \mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) \\ \Leftrightarrow\ & \text{Spaltenrang von } A|b = \text{Spaltenrang von } A \\ \Leftrightarrow\ & \langle y_1, \ldots, y_n, b\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \\ \Leftrightarrow\ & b \in \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \\ \Leftrightarrow\ & b \in \mathrm{Spalten}(A) \\ \Leftrightarrow\ & L(S_{A,b}) \neq \emptyset, \end{aligned}$$
wobei die letzte Aequivalenz von Korollary 4.8.7 (1) folgt. □

Korollar 4.8.10. *Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$, und es sei $A|b$ die erweiterte Matrix. Folgende Bedingungen sind aequivalent:*

(1) *Es gilt* $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) = n$.

(2) *Das lineare Gleichungssystem*
$$S_{A,b} :\ A.x = b$$
hat genau eine Loesung.

Proof. Uebung. □

5. Intermezzo: Gruppen und Ringe

5.1. **Gruppen.**

Definition 5.1.1. *Eine* Gruppe *ist eine Menge G zusammen mit einer Operation $\star : G \times G \to G$, die folgende Axiome erfuellt:*

(1) Assoziativitaet: $\forall g, h, k \in G$ gilt $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$;
(2) Existenz eines neutralen Elements: es gibt ein Element $e \in G$, so dass $\forall g \in G$ gilt $g \star e = e \star g = g$;[24]
(3) Existenz eines Inversen: $\forall g \in G$ gibt es ein Element g^{-1} so dass $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$.[25]

Eine Gruppe ist kommutativ oder abelsch*, wenn $g \star h = h \star g$ fuer alle $g, h \in G$.*

Beispiel 5.1.2.

- Die triviale Gruppe ist die Gruppe mit einem Element.
- Es sei V ein Vektorraum. Dann ist V eine Gruppe unter der Vektoraddition. Diese Gruppe ist abelsch (= kommutativ): es gilt $v + u = u + v$ fuer all $u, v \in V$.
- Insbesondere ist jeder Koerper unter der Addition eine kommutative (= abelsche) Gruppe.
- Auch $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{F}_p, +)$ sind abelsche Gruppen. Insbesondere ist $(\mathbb{F}_p, +)$ das erste Beispiel einer *endlichen* Gruppe.
- Es sei K ein Koerper, und es sei $K^\times = K \backslash \{0\}$. Dann ist $K^\times$ eine abelsche Gruppe bezueglich der Multiplikation.
- Die Menge $\{\pm 1\}$ ist eine Gruppe unter Multiplikation; es ist die einzige Gruppe der Ordnung 2 und die kleinste nicht-triviale Gruppe.

Diese Beispiele sind aber alle abelsch und etwas langweilig. Interessante Beispiele kommen aus der Geometrie und aus der Theorie von Matrizen:

Definition 5.1.3. *Es sei X ein geometrischer Koerper. Eine* Symmetrie von X *ist eine Abbildung von X auf sich selber, die die Distanzen von Punkten in X zueinander nicht aendert.*

Beispiel 5.1.4. Beispiele fuer Symmetrien sind Drehungen und Spiegelungen.

Beispiele 5.1.5.

(1) Die Symmetrien des Quadrats sind eine nicht-abelsche endliche Gruppe der Ordnung 8, die sogenanne *dihedrale Gruppe D_8*.
(2) Es gibt 48 Symmetries eines Wuerfels; sie bilden eine nicht-abelsche Gruppe, die *symmetrische Gruppe S_4*.
(3) Die Symmetriegruppe des Ikosaeder hat 60 Elemente; es ist die *alternierende Gruppe A_5*, eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5. [26]
(4) Es sei $n \geq 1$, und es sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Menge aller invertierbaren Matrizen in $M_{n \times n}(K)$. Dann ist $\mathrm{GL}_n(K)$ eine Gruppe unter Matrix-Multiplikation; sie heisst die *allgemeine lineare Gruppe vom Grad n*. Wenn $n > 1$, dann ist $\mathrm{GL}_n(K)$ nicht abelsch. (Was ist $\mathrm{GL}_1(K)$?) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ had viele interessante Untergruppen: zum Beispiel die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen, oder die (abelsche) Untergruppe diagonaler Matrizen. Weitere Beispiele fuer Matrixgruppen sind symplektische Gruppen, unitaere Gruppen und orthogonale Gruppen. Letztere werden Sie in LA2 kennenlernen.

Übung 5.1.6. *Wieviele Elemente hat die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?*

Bemerkung 5.1.7. *Gruppen finden sich in der Algebra ueberall, und Gruppentheorie ist ein riesiges Forschungsgebiet. Ein paar Beispiele:*

(1) Vor 200 Jahren hat der franzoesische Mathematiker Evariste Galois im Alter von 20 Jahren mit Gruppentheorie die Frage beantwortet, ob sich ein Polynom durch Radikale (verallgemeinerte Wurzeln) loesen laesst. Seine Idee war, jedem Polynom eine endliche Gruppe zuzuordnen und die Frage der Loesbarkeit mit Radikalen mit Hilfe der Eigenschaften dieser Gruppe zu beantworten. Galois' Arbeit hat ein neues Forschungsgebiet geschaffen: die algebraische Zahlentheorie.

[24] Man kann zeigen, dass das neutrale Element e eindeutig bestimmt ist.
[25] Man kann zeigen, dass g^{-1} eindeutig bestimmt ist; es heisst das Inverse von g.
[26] Ueber alternierende Gruppen werden wir spaeter im Zusammenhang mit Determinanten noch mehr erfahren.

(2) *Von 1955 bis 2004 hat eine Gruppe von Forschern alle sog. einfachen endlichen Gruppen klassifiziert (eine Art Periodensystem der Gruppentheorie); der Beweis erstreckt sich ueber mehrere 10000 Seiten. Diese Gruppen lassen sich in Familien einteilen, mit Ausnahme der* 26 *sog.* sporadischen Gruppen*, die in keine der Familien gehoeren. Die groessten dieser sporadischen Gruppens sind die Monstergruppe (ca.* $8 \cdot 10^{53}$ *Elemente*[27]*) und das Babymonster (ca.* $4 \cdot 10^{33}$ *Elemente).*

(3) *Matrixgruppen lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra studieren: dieses sehr attraktive Gebiet heisst* Darstellungstheorie*.*

(4) *1998 hat Richards Borcherds die Fieldsmedallie dafuer bekommen, dass er die sogenannte* Moonshine Vermutung *von Conway bewiesen hat, die die Darstellungen der Monstergruppe mit den Werten einer in der Zahlentheorie wichtigen Funktion in Verbindung gebracht hat.*

(5) *Eines der wichtigsten heutigen Forschungsgebiete ist die sogenannte* Langlands-Korrespondenz*, das Eigenschaften der allgemeinen Linearen Gruppen mit Objekten in der Galoistheorie miteinander in Beziehung bringt. Einer der einfachsten Faelle dieser Korrespondenz ist die sogenannte* Taniyama–Shimura Vermutung*, die Wiles' Beweis des Fermatschen Satzes zugrunde liegt.*

[27] Zum Vergleich: die Erde besteht aus ca $6 \cdot 10^{49}$ Atomen.

5.2. **Ringe.**

Definition 5.2.1. *Ein Ring ist eine Menge R mit zwei Operationen $+$ (Addition) und $\times$ (Multiplikation), die folgende Axiome erfuellen:*

1. *$(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe;*
2. *Multiplikation ist assoziativ: $\forall\, a, b, c \in R$ gilt*
$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$
3. *Es gibt ein Element $1_R \in R$ fuer dass gilt*[28]
$$1_R \times a = a \times 1_R = a.$$
4. *Multiplikation ist distributiv bezueglich der Addition, d.h.*
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad \text{und} \qquad (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Bemerkung 5.2.2. *Hier multiplizieren wir nicht Elemente von R mit Skalaren, sonder wir multiplizieren zwei Elemente von R. Ein Vektorraum ist also im Allgemeinen kein Ring!*

Eine Ringe haben Sie schon kennengelernt:

Beispiele 5.2.3.

1. $\mathbb{Z}$ ist ein (kommutativer) Ring.
2. Ebenso ist jeder Koerper ein kommutativer Ring.
3. Es sei $n \geq 1$. Dann ist $M_{n\times n}(K)$ ein Ring unter Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation. Wenn $n > 1$, dann ist der Ring nicht kommutativ (d.h. die Multiplikation ist nicht kommutativ).

Bemerkung 5.2.4. *Auch Ringe finden sich ueberall in der Algebra. Der "Herr der Ringe" ist der franzoesische Mathematiker Jean-Marc Fontaine*[29]*, da er aeussert wichtige sogenannte 'Periodenringe' (mit den schoenen Namen $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \ldots$) in der p-adischen Hodge Theorie eingefuehrt hatte.*

---

[28] Das Element ist die multiplikative Identitaet.

[29] ganz egal, was Tolkien dazu sagt

6.1. **Definition und erste Eigenschaften.**

Definition 6.1.1. *Es seien V, W K-Vektorraeume. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ fuer die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W.*

Satz 6.1.2. *Es seien V, W K-Vektorraeume. Dann hat $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ebenfalls die Struktur eines K-Vektorraums, mit den folgenden Operationen:*

(1) *Es seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann ist $T_1 + T_2$ definiert durch*
$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \qquad \forall\, v \in V.$$
(2) *Es seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\alpha \in K$. Dann ist*
$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \qquad \forall\, v \in V.$$

Proof. Wir zeigen zunaechst, dass $T_1 + T_2$ und αT ebenfalls Elemente von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ sind. Dazu benutzen wir Bemerkung 4.1.6. Es seien $u, v \in V$ und $\lambda \in K$.

(1) Es gilt
$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(v + \lambda u) &= T_1(v + \lambda u) + T_2(v + \lambda u)\\ &= T_1(v) + \lambda T_1(u) + T_2(v) + \lambda T_2(u)\\ &= T_1(v) + T_2(v) + \lambda\,(T_1(u) + T_2(u))\\ &= (T_1 + T_2)(v) + \lambda(T_1 + T_2)(u),\end{aligned}$$
das heisst, $T_1 + T_2$ ist linear.

(2) Es gilt
$$\begin{aligned}(\alpha T)(v + \lambda u) &= \alpha T(v + \lambda u)\\ &= \alpha T(v) + \alpha\lambda T(u)\\ &= (\alpha T)(v) + \lambda(\alpha T)(u),\end{aligned}$$
das heisst αT ist linear.

Wir muessen nun zeigen, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit diesen Operationen alle Vektorraumaxiome erfuellt. Wir zeigen die Existenz des neutralen Elements; der Rest ist eine Uebung.

Es sei $0 : V \to W$ die Null-Abbildung, d.h. $0(v) = 0_W$ fuer alle $v \in V$. Klarerweise ist 0 linear. Wir zeigen nun, dass $T + 0 = 0 + T = T$ fuer all $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Tatsaechlich gilt
$$(T + 0)(v) = T(v) + 0(v) = T(v) + 0_W = T(v),$$
das heisst $T + 0 = T$. Aehnlich koennen wir zeigen, dass $0 + T = T$. □

Theorem 6.1.3. *Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorraeume, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von V, bzw. W. Dann ist die Abbildung*
$$\Psi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m\times n}(K), \qquad T \mapsto [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$
linear und ein Isomorphismus.

Proof. Selbstverstanedlich gilt
$$\Psi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T_1 + \alpha T_2) = \Psi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T_1) + \alpha\Psi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T_2),$$
das heisst die Abbildung ist linear.

Wir muessen daher dank Lemma 4.2.19 nur zeigen, dass $\Psi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ bijektiv ist. Aber das ist der Inhalt von Bemerkung 4.4.4. □

Korollar 6.1.4. *Wenn V, W endlich-dimensionale Vektorraeume sind, dann gilt das gleiche fuer $\mathrm{Hom}(V, W)$, und es gilt*
$$\dim_K \mathrm{Hom}(V, W) = \dim_K V \cdot \dim_K W.$$

Proof. Es seien $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dank Theorem 6.1.3 wissen wir, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W) \cong M_{m\times n}(K)$. Aber $M_{m\times n}(K)$ ist endlich-dimensional, mit $\dim M_{m\times n}(K) = mn$ (was ist eine Basis?). □

In dem Fall, wenn $W = V$, laesst sich Theorem 6.1.3 noch verfeinern:

Satz 6.1.5. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist* $\mathrm{Hom}(V, V)$ *ein Ring unter der Addition und Komposition von Funktionen. Weiterhin ist die Abbildung* $\Psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_K(V, V) \to M_{n\times n}(K)$, *fuer eine Basis $\mathcal{B}$ von V, ein Ring-Isomorphismus.*

Proof. (Skizze) Die Ring-Struktur von $\mathrm{Hom}(V, V)$ kann durch explizite Rechnungen ueberprueft werden.

Weiterhin folgt von Satz 4.3.7, dass

$$\Psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T \circ S) = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}},$$

das heisst, $\Psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist kompatibel mit den jeweiligen Ring Multiplikationen. □

6.2. **Der duale Vektorraum.** Ein sehr wichtiges Beispiel von $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist der Fall, wenn $W = K$.

Definition 6.2.1. *Es sei V ein K-Vektorraum. Der* Dualraum von V *ist der Vektorraum*

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K).$$

Die Elemente von V^* sind lineare Abbildungen $V \to K$; sie heissen Linearformen.

Beispiele 6.2.2.

(1) Es sei $n \geq 1$. Dann ist die Spurabbildung

$$\mathrm{Tr}: M_{n\times n}(K) \to K, \qquad A = (a_{ij}) \mapsto a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

eine Linearform.

(2) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $v_1 \dots v_n$. Es sei $\ell : V \to K$ die Abbildung, die einen Vektor

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

auf a_1 abbildet. Dann ist V eine Linearform.

(3) Es sei V der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$, uns es sei $a \in [0, 1]$. Dann ist die Abbildung

$$f \mapsto f(a)$$

eine Linearform.

(4) Es sei V der reelle Vektorraum aller differenzierbaren Functionen $(0, 1) \to \mathbb{R}$, und es sei $a \in (0, 1)$. Dann ist

$$f \mapsto (Df)(a),$$

mit Df die Ableitung von f, eine Linearform.

(5) Es sei V der reelle Vektorraum aller integrierbaren Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

eine Linearform.

Beachte 6.2.3. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, und es sei $\ell \in V^*$. Dann ist ℓ durch $\ell(v_1), \dots, \ell(v_n)$ eindeutig bestimmt (Korollar 4.1.8).* Insbesondere sind zwei Linearformen ℓ, $\lambda \in V^*$ genau dann gleich, wenn

$$\ell(v_i) = \lambda(v_i) \qquad \forall 1 \leq i \leq n$$

gilt. *Wir werden diese Beobachtung wieder und wieder benutzen.*

Definition 6.2.4. *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis fuer V. Fuer $1 \leq i \leq n$, definiere eine Linearform $v_i^* \in V^*$ wie folgt:*

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Explizit bildet die Linearform v_i^* einen Vektor $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ auf den Koeffizienten α_i ab.

Satz 6.2.5. *Die Elemente $v_1^*, \dots, v_n^*$ sind eine Basis von V^*. Insbesondere ist V^* ebenfalls n-dimensional.*

Proof. Es sei $\ell : V \to K$ eine Linearform; wir muessen zeigen, dass sich ℓ eindeutig als Linearkombination von $v_1^*, \dots, v_n^*$ schreiben laesst. Definiere die Linearform

$$f = \ell(v_1)v_1^* + \cdots + \ell(v_n)v_n^*. \tag{27}$$

Dann gilt $f(v_i) = \ell(v_i)$ $\forall 1 \leq i \leq n$, und daher gilt $\ell = f$ dank Beobachtung 6.2.3. Daher ist $v_1^*, \dots, v_n^*$ ein Erzeugendensystem von V^*.

Nimm nun an, dass es Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gibt, so dass

$$\alpha_1 v_1^* + \cdots + \alpha_n v_n^* = 0_{V^*}; \tag{28}$$

hier bezeichnet 0_{V^*} die Linearform, die jeden Vektor $v \in V$ auf $0 \in K$ abbildet. Insbesondere koennen wir (28) auf v_i auswerten: es gilt

$$(\alpha_1 v_1^* + \cdots + \alpha_n V_n^*)(v_i) = 0_{V^*}(v_i)$$

Bei der Definition der dualen Basis ist die linke Seite gleich α_i, und die rechte Seite gleich 0. Daher gilt

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

das heisst, die Vektoren $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sind linear unabhaengig und daher eine Basis.[30] $\square$

Beispiel 6.2.6. Es sei $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mit Standardbasis e_0, e_1, e_2 mit $e_i = x^i$. Wir berachten folgende Linearform

$$\ell : V \to \mathbb{R}. \qquad \ell(f(x)) = Df(2),$$

wobei D die Ableitungsabbildung ist. Dann gilt

$$\ell = 0 \cdot e_0^* + 1 \cdot e_1^* + 4 \cdot e_2^*.$$

Mit anderen Worten, wenn wir ein beliebiges Element $y \in V$ als Linearkombination der Basisvektoren schreiben, $y = a + bx + cx^2 = ae_0 + be_1 + ce_2$, dann gilt

$$\ell(y) = 0 \cdot a + 1 \cdot b + 4c.$$

Definition 6.2.7. *Die Basis* $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ *ist die* duale Basis *von* $\mathcal{B}$*.*

Es seien nun $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V. Wir erinnern uns: die Basiswechselmatrix $A = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ist die Matrix $A = (a_{ij})$, deren Eintraege definiert sind durch die Gleichungen

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i. \tag{29}$$

Was gilt nun fuer die Basiswechselmatrizen $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}$ und $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}$?

Beispiel 6.2.8. Es sei $V = \mathbb{R}^2$, und es seien $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C}$ die Standardbasis. Dann ist die Basiswechselmatrix gegeben durch

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

das heisst

$$v_1 = e_1 + 2e_2 \qquad \text{und} \qquad v_2 = 3e_1 - e_2. \tag{30}$$

Betrachten wir nun die dualen Basen $\mathcal{B}^* = (v_1^*, v_2^*)$ und $\mathcal{C}^* = (e_1^*, e_2^*)$. Schreiben wir $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so gilt

$$v_1^* = ae_1^* + ce_2^* \qquad \text{und} \qquad v_2^* = be_1^* + de_2^*. \tag{31}$$

Wenden wir (31) auf (30) an, so erhalten wir

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Ok. Vielleicht haben wir mit $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}$ mehr Glueck? Schreiben wir $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, so gilt

$$e_1^* = \alpha v_1^* + \gamma v_2^* \qquad \text{und} \qquad e_2^* = \beta v_1^* + \delta v_2^*. \tag{32}$$

Wenden wir (32) auf (30) an, so erhalten wir

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Faellt Ihnen was auf?

[30] Anstatt die linere Unabhaengigkeit zu beweisen, haetten wir ebenfalls Korollar 6.1.4 benutzen koennen: $v_1^*, \ldots, v_n^*$ ist ein Erzeugendensystem mit n Elementen in einem n-dimensionalen Vektorraum und daher eine Basis.