Summen von Vektorräumen

Alois Schaffler

25. November 2024

Wir fixieren einen Körper K und einen K-Vektorraum V.

Definition 1. Seien $U_1, \ldots, U_n \leq V$ Unterräume. Wir definieren die *Summe* der Unterräume als

$$U_1 + \ldots + U_n = \{u_1 + \ldots + u_n \in V \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon u_i \in U_i\}.$$

Proposition 2. *Es seien $U_1, \ldots, U_n \leq V$ Unterräume. Dann gilt*

$$U_1 + \ldots + U_n = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle.$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq n$ sei $u_i \in U_i \subseteq \langle \bigcup_{i=1}^n U_i \rangle$. Da die lineare Hülle ein Unterraum ist, folgt daraus

$$u_1 + \ldots + u_n \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle.$$

Da die $u_i \in U_i$ beliebig gewählt waren, schließen wir, dass

$$U_1 + \ldots + U_n \subseteq \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle.$$

Umgekehrt ist es eine leichte Übung zu zeigen, dass die Summe von Unterräumen wieder ein Unterraum ist der alle U_i enthält. Da die lineare Hülle der kleinste Unterraum bezüglich Inklusion ist, der alle U_i enthält, folgt daraus

$$\left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle \subseteq U_1 + \ldots + U_n.$$

□

Die Bezeichung „Summe“ legt nahe, dass die Summe als Operation auf der Menge aller Unterräume kommutativ und assoziativ ist. Das ist tatsächlich so.

Lemma 3. *Seien $U_1, U_2, U_3 \leq V$ Unterräume. Dann gelten:*

1. $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$.
2. $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3) = U_1 + U_2 + U_3$.

Beweis. Beide Aussagen folgen unmittelbar aus Kommutativität und Assoziativität der Addition auf V. □

Im Falle einer Summe zweier endlichdimensionaler Unterräume kann man die Dimension einer Summe von Unterräumen mit folgender Formel bestimmen.

Satz 4 (Dimensionssatz)**.** *Seien $U_1, U_2 \leq V$ endlichdimensionale Unterräume. Dann gilt*

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2).$$

Beweis. Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wir können diese Basis zu Basen $\mathcal{C} = \{b_1, \ldots b_r, c_1, \ldots, c_s\}$ von U_1 und $\mathcal{D} = \{b_1, \ldots, b_r, d_1, \ldots, d_t\}$ von U_2 erweitern. Wir zeigen nun, dass

$$\mathcal{E} = \{b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_t\} \subseteq U_1 + U_2$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{E}$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \xi_1, \ldots, \xi_t \in K$, sodass

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_s c_s + \xi_1 d_1 + \ldots + \xi_t d_t = 0. \tag{1}$$

Dann folgt, dass

$$\xi_1 d_1 + \ldots + \xi_t d_t = -(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_s c_s) \in \langle \mathcal{C} \rangle = U_1,$$

aber ebenso

$$\xi_1 d_1 + \ldots + \xi_t d_t \in \langle \mathcal{D} \rangle = U_2.$$

Gemeinsam ergibt das

$$\xi_1 d_1 + \ldots + \xi_t d_t \in U_1 \cap U_2 = \langle \mathcal{B} \rangle.$$

Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r \in K$, sodass

$$\xi_1 d_1 + \ldots + \xi_t d_t = \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_r b_r.$$

Wir formen um und erhalten

$$-\eta_1 b_1 - \ldots - \eta_r b_r + \xi_1 d_1 + \ldots \xi_t d_t = 0.$$

Da $\mathcal{D}$ linear unabhängig ist, folgt daraus $\eta_1 = \ldots = \eta_r = \xi_1 = \ldots = \xi_t = 0$. Die Gleichung (1) vereinfacht sich daher zu

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_s c_s = 0.$$

Da $\mathcal{C}$ linear unabhängig ist, folgt nun $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$, und die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{E}$ ist bewiesen. Nun müssen wir noch zeigen, dass $U_1 + U_2 = \langle \mathcal{E} \rangle$. Beachte zunächst, dass $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ gilt, und daher auch $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ sowie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Insbesondere gilt also

$$\langle \mathcal{C} \rangle \cup \langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathcal{E} \rangle.$$

Aufgrund von Proposition 2 schließen wir nun

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle = \langle \langle \mathcal{C} \rangle \cup \langle \mathcal{D} \rangle \rangle \subseteq \langle \langle \mathcal{E} \rangle \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle,$$

woraus $U_1 + U_2 = \langle \mathcal{E} \rangle$ folgt. Es ist $\mathcal{E}$ also eine Basis von $U_1 + U_2$. Damit erhalten wir schlussendlich

$$\dim_K(U_1 + U_2) = r + s + t = r + s + r + t - r = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2).$$

$\square$

Wenn wir Vektorräume untersuchen, dann sind Basen ein wesentliches Hilfsmittel. Denn mithilfe einer Basis kann man nicht nur jeden Vektor als Linearkombination darstellen, sondern erhält sogar eine eindeutige Darstellung. Dieses Konzept wollen wir nun auf Summen von Unterräumen übertragen.

Definition 5. Seien $U_1, \ldots, U_n \leq V$ Unterräume. Die Summe der Unterräume heißt *direkt*, wenn

$$\forall u_1 \in U_1, \ldots u_n \in U_n \colon u_1 + \ldots + u_n = 0 \implies u_1 = \ldots = u_n = 0$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$$

für die Summe.

Direkte Summen sind also von ihrer Struktur als Menge nicht anders als gewöhnliche Summen, sie erfüllen jedoch eine zusätzliche Eigenschaft. Wenn man nun eine Summe „kommentarlos“ mit $\oplus$ notiert, dann bedeutet dies, dass wir die Summe betrachten und zusätzlich annehmen oder behaupten, dass die Summe direkt ist. Wenn jedoch der Hauptgehalt einer Aussage ist, dass eine Summe von Unterräumen direkt ist, so ist es (meiner Ansicht nach) schöner, sie mit $+$ zu notieren und in Worten dazuzuschreiben, dass die Summe direkt ist (vergleiche mit Lemma 6 unten).

So wie Summen assoziativ sind, verträgt sich auch die Direktheit gut mit dieser Assoziativität.

Lemma 6. *Seien $U_1, \dots, U_n \leq V$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
1. *Die Summe $U_1 + \dots + U_n$ ist direkt.*
2. *Die Summen $U_1 + \dots + U_{n-1}$ und $(U_1 + \dots + U_{n-1}) + U_n$ sind direkt.*

Beweis. „1 $\Rightarrow$ 2“: Für $1 \leq i \leq n-1$ seien $u_i \in U_i$ mit $u_1 + \dots + u_{n-1} = 0$. Da die Summe $U_1 + \dots + U_n$ direkt ist, folgt daher direkt aus der Definition von direkten Summen (setze $u_n = 0$), dass $u_1 = \dots = u_{n-1} = 0$ gilt. Also ist $U_1 + \dots + U_{n-1}$ direkt. Nun seien $v_1 \in U_1 + \dots + U_{n-1}$ und $v_n \in U_n$, sodass $v_1 + v_n = 0$. Dann existieren $w_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq n-1$, sodass $v_1 = w_1 + \dots + w_{n-1}$. Dann gilt $w_1 + \dots + w_{n-1} + w_n = 0$, also $w_1 = \dots = w_{n-1} = v_n = 0$, da die Summe $U_1 + \dots + U_{n-1}$ direkt ist.

„2 $\Rightarrow$ 1“: Seien $u_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq n$, sodass $u_1 + \dots + u_n = 0$. Dann gilt $u_1 + \dots + u_{n-1} \in U_1 + \dots + U_{n-1}$, und $(u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n = 0$, also folgt, dass $u_1 + \dots + u_{n-1} = u_n = 0$ sein muss, denn die Summe $(U_1 + \dots + U_{n-1}) + U_n$ ist direkt. Aus $u_1 + \dots + u_{n-1} = 0$ folgt aber auch $u_1 = \dots = u_{n-1} = 0$, denn $U_1 + \dots + U_{n-1}$ ist ebenfalls eine direkte Summe. $\square$

Abschließend betrachten wir nun noch ein Kriterium, anhand dessen man in einigen Fällen schnell sehen kann, ob eine Summe direkt ist oder nicht. Wir beginnen mit zwei Unterräumen.

Proposition 7. *Seien $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume. Dann sind äquivalent:*
1. *Die Summe $U_1 + U_2$ ist direkt.*
2. *$U_1 \cap U_2 = \{0\}$.*

Beweis. „1 $\Rightarrow$ 2“: Sei $u \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $u - u = 0$, und $u \in U_1$, sowie $-u \in U_2$. Aus der Direktheit von $U_1 + U_2$ folgt daher $u = -u = 0$, und somit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

„2 $\Rightarrow$ 1“: Seien $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_1 + u_2 = 0$. Dann gilt $u_1 = -u_2 \in U_2$, also $u_1 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Damit gilt also $u_1 = 0$, und auch $u_2 = -u_1 = 0$. Die Summe ist also direkt. $\square$

Dieses Kriterium überträgt sich nicht auf mehr als zwei Unterräume.

Beispiel 8. Wir betrachten $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und die Unterräume $U_1 = \langle\{e_1\}\rangle$, $U_2 = \langle\{e_2\}\rangle$ und $U_3 = \langle\{e_1 + e_2\}\rangle$, wobei e_1 und e_2 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$ bezeichnen. Dann ist die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ nicht direkt, denn $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0$, und keiner der drei Vektoren ist dem Nullvektor gleich. Dennoch gilt

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}.$$

Wir benötigen nun noch ein kleines Lemma.

Lemma 9. *Seien $U_1, \dots, U_n \leq V$ endlichdimensionale Unterräume. Dann gilt*

$$\dim_K(U_1 + \dots U_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i).$$

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Induktion nach n. Der Basisfall $n = 2$ folgt aus Satz 4:

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2) \leq \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2).$$

Es sei nun $n > 2$ und die Behauptung gelte für alle Summen mit $n - 1$ Unterräumen. Dann folgt sofort aus dem Fall $n = 2$ und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\dim_K(U_1 + \dots + U_n) = \dim_K((U_1 + \dots + U_{n-1}) + U_n) \leq \dim_K(U_1 + \dots U_{n-1}) + \dim_K(U_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i).$$

$\square$

Für mehr als zwei Unterräume können wir nun folgende Aussage beweisen, die sich oftmals als sehr nützlich erweist.

Proposition 10. *Seien $U_1, \ldots, U_n \leq V$ endlichdimensionale Unterräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ ist direkt.*
2. *Es gilt*

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i).$$

Beweis. „1 $\Rightarrow$ 2“: Für führen einen Beweis durch Induktion nach n. Der Basisfall $n = 2$ folgt aus Satz 4 und Proposition 7: Wenn $U_1 + U_2$ direkt ist, dann gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also $\dim_K(U_1 \cap U_2) = 0$, woraus dann $\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2)$ folgt. Nun sei $n > 2$ und die Behauptung sei für direkte Summen mit $n-1$ Unterräumen bereits bewiesen. Nach Lemma 6 sind die Summen $U_1 + \ldots + U_{n-1}$ und $(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n$ direkt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K(U_i).$$

Außerdem folgt aus dem Fall $n = 2$, dass

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_n) = \dim_K((U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n) = \dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim_K(U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i),$$

und damit ist die Aussage bewiesen.

„2 $\Rightarrow$ 1“: Wir beweisen auch diese Aussage mittels Induktion nach n. Der Basisfall $n = 2$ folgt wie oben aus Satz 4 und Proposition 7: Wenn $\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2)$, dann muss $\dim_K(U_1 + U_2) = 0$ sein, also $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, was bedeutet, dass die Summe $U_1 + U_2$ direkt ist. Nun sei $n > 2$ und die Aussage für Summen von $n-1$ Unterräumen schon gezeigt. Wir verwenden Lemma 6, und zeigen, dass $U_1 + \ldots + U_{n-1}$ und $(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n$ direkt sind. Es gilt nach Voraussetzung, dass

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i).$$

Nach Satz 4 gilt außerdem

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1 + \ldots + U_n) &= \dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim_K(U_n) - \dim_K((U_1 + \ldots + U_{n-1}) \cap U_n)\\ &\leq \dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim_K(U_n).\end{aligned}$$

Kombinieren wir diese beiden Aussagen, so erhalten wir

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim_K(U_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i).$$

Kürzen liefert schließlich

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K(U_i).$$

Aber nach Lemma 9 gilt die umgekehrte Ungleichung, also muss

$$\dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K(U_i)$$

gelten. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit die Summe $U_1 + \ldots + U_{n-1}$ direkt. Weiterhin gilt nach dem eben gezeigten

$$\dim_K((U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n) = \dim_K(U_1 + \ldots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i) = \dim_K(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim_K(U_n),$$

womit aus dem Fall $n = 2$ folgt, dass die Summe $(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n$ auch direkt ist. $\square$

Bislang haben wir uns mit Unterräumen eines gegebenen Vektorraums V beschäftigt. Nun lassen wir diese Bedingung fallen.

Definition 11. Seien V_1 und V_2 zwei K-Vektorräume. Wir definieren ihr *Produkt* als

$$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

mit den Operationen

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$
$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

für $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$ und $\lambda \in K$. Wir notieren das Produkt oft auch als $V_1 \oplus V_2$ und nennen es *direkte Summe.*

Diese Operationen bezeichnet man auch als *komponentenweise Operationen.* Es ist leicht nachzurechnen, dass $V_1 \oplus V_2$ wieder ein Vektorraum ist. Wir können auch leicht aus Basen für V_1 und V_2 eine Basis für die direkte Summe konstruieren.

Proposition 12. *Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale K-Vektorräume mit jeweiligen Basen*

$$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\},$$
$$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{D} = \{(b_1, 0), \ldots, (b_m, 0), (0, c_1), \ldots, (0, c_n)\}$$

eine Basis von $V_1 \oplus V_2$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \oplus V_2) = \dim_K(V_1) + \dim_K(V_2).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{D}$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit

$$\lambda_1(b_1, 0) + \ldots + \lambda_m(b_m, 0) + \mu_1(0, c_1) + \ldots + \mu_n(0, c_n) = (0, 0).$$

Nach Definition der Operationen bedeutet dies, dass

$$(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m, \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n) = (0, 0)$$

gilt. Das ist aber äquivalent zu

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = 0$$

und

$$\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n = 0.$$

Da $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ linear unabhängig sind, folgt daraus nun $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$. Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ auch ein Erzeugendensystem ist. Sei $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ beliebig. Dann gibt es $\xi_1, \ldots \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n \in K$ mit

$$v_1 = \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_m b_m$$

und

$$v_2 = \eta_1 c_1 + \ldots + \eta_n c_n,$$

denn $\mathcal{B}$ erzeugt V_1 und $\mathcal{C}$ erzeugt V_2. Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$(v_1, v_2) = \xi_1(b_1, 0) + \ldots + \xi_m(b_m, 0) + \eta_1(0, c_1) + \ldots + \eta_n(0, c_n).$$

□

Auf den ersten Blick erscheint es so, als wäre hier eine große Verwechslungsgefahr zwischen direkten Summen von Unterräumen und direkten Summen von Vektorräumen vorhanden. Das folgende Resultat erklärt, warum man über diese Uneindeutigkeit der Notation getrost hinwegsehen kann.

Proposition 13. *Seien $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Summe $U_1 + U_2$ ist direkt.*
2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} s\colon U_1 \times U_2 &\to U_1 + U_2 \\ (u_1, u_2) &\mapsto u_1 + u_2 \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. „1 $\Rightarrow$ 2“: Die Abbildung s ist offenbar linear und surjektiv. Nun sei $(u_1, u_2) \in \ker(s)$. Dann gilt also

$$u_1 + u_2 = s(u_1, u_2) = 0,$$

woraus $u_1 = u_2 = 0$ folgt, denn die Summe $U_1 + U_2$ ist direkt. Das bedeutet

$$\ker(s) = \{(0, 0)\},$$

also ist s auch injektiv und somit ein Isomorphismus.

„2 $\Rightarrow$ 1“: Seien $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_1 + u_2 = 0$. Also gilt $(u_1, u_2) \in \ker(s)$. Da s ein Isomorphismus, und somit insbesondere injektiv ist, folgt daraus $(u_1, u_2) = (0, 0)$, also $u_1 = u_2 = 0$. Daher ist die Summe $U_1 + U_2$ direkt. □

Dieses Resultat besagt also, dass wenn eine Summe zweier Unterräume direkt ist, ihre Summe isomorph zu ihrem Produkt ist (und der Isomorphismus hat zusätzlich eine sehr einleuchtende Form), sodass man in diesem Fall der Unterschied zwischen der Summe und dem Produkt (vom Sichtpunkt der linearen Algebra aus) vernachlässigbar ist. Somit sorgt die Notation des Produkts von Vektorräume als Summe dafür, dass man seine Notation mit einem Symbol weniger gestalten kann.

Das Obige funktioniert gut, sofern man endliche Produkte von Vektorräumen betrachtet. Im unendlichen Falle ist Vorsicht geboten.

Bemerkung 14. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein K-Vektorraum V_n gegeben. Dann ist das Produkt

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon v_n \in V_n\}$$

mit komponentenweisen Operationen ebenfalls ein Vektorraum. Dieses unendliche Produkt ist oft schwierig zu handhaben und in vielen Fällen arbeitet man stattdessen mit einem gewissen Unterraum des Produkts. Diesen Unterraum nennt man direkte Summe und er ist wie folgt definiert:

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n = \left\{ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \;\middle|\; v_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dabei heißt „$v_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$“, dass es nur endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $v_k \neq 0$ gibt. (Das ist eine oft verwendete Schreibweise, die man kennen sollte!) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir V_k als Unterraum von $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$ auffassen, denn die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} V_k &\to \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \\ v &\mapsto (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

wobei $v_k = v$ und $v_n = 0$ für $n \neq k$, ist ein Isomorphismus. Jedes V_k ist also isomorph zu einem Unterraum $\tilde{V}_k \leq \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Man kann nun zeigen (das ist nicht schwer, sondern im Wesentlichen nur durchkauen der Definitionen), dass

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{V}_n$$

gilt, wobei die linke direkte Summe unserer Definition von eben entspricht und die rechte direkte Summe genau die Summe der Unterräume $\tilde{V}_n$ ist (wobei man natürlich noch (direkte) Summen für unendlich viele Unterräume einführen muss und zeigen muss, dass diese Summe tatsächlich direkt ist). Man kann diesen Isomorphismus analog zum Isomorphismus von Proposition 13 definieren. Die Notation ist also auch im unendlichen Fall nicht mehrdeutig, nur muss man nun zwischen Produkt und direkter Summe unterscheiden. Außerdem gibt uns die Definition im unendlichen Fall einen weiteren Grund für die gebräuchliche Notation eines endlichen Produkts als direkte Summe: Wenn $V_n = \{0\}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist die unendliche direkte Summe gleich dem unendlichen Produkt.