Musterlösung Serie 2

UNTERGRUPPEN, NEBENKLASSEN, NORMALTEILER

---

14. Seien $m = 12$ und $n = 21$ und sei g ein Erzeuger der zyklischen Gruppe C_{mn}. Weiter sei $x := g^{120}$.

(a) Zeige: $\operatorname{ord}(x) = n$.

(b) Finde mehrere Elemente $y, z \in C_{mn}$ mit

$$C_{mn} \neq \langle z \rangle, \quad C_{mn} = \langle y \rangle \quad \text{und} \quad z^m = y^m = x\,.$$

Lösung: Wir verwenden Aufgabe 6 (a). Diese besagt $\operatorname{ord}(g^k) = \frac{\mathrm{kgV}(k,mn)}{k}$.

(a) Aus Aufgabe 6 (a) wissen wir

$$\operatorname{ord}(x) = \frac{\mathrm{kgV}(120, 12 \cdot 21)}{120} = 21.$$

(b) Sei $y = g^k$ mit $0 \leqslant k < nm = 252$. Wieder wegen Aufgabe 6 (a) muss k genau die Bedingungen

- $\frac{\mathrm{kgV}(k,mn)}{k} = mn$ und
- $mk \in \{120 + amn : a \in \mathbb{Z}\} \cap \{0, 1, 2, \ldots, mn - 1\}$

erfüllen. Die erste Bedingung ist äquivalent zu $\mathrm{ggT}(k, mn) = 1$, was wiederum äquivalent ist dazu, dass k durch keine der Primzahlen $2, 3$ oder 7 teilbar ist. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu $k \in \{10 + an : a \in \mathbb{Z}\} \cap \{0, 1, 2, \ldots, mn - 1\}$. Daraus folgt, dass die möglichen k genau $k = 31, 73, 115, 157, 199, 241$ sind.

Sei nun $z = g^l$ mit $0 \leqslant k < nm$. Wieder wegen Aufgabe 7 (a) muss l genau die Bedingungen

- $\frac{\mathrm{kgV}(l,mn)}{l} < mn$ und
- $ml \in \{120, 120 + mn, 120 + 2mn, \ldots\}$

erfüllen. Die erste Bedingung ist äquivalent zu $\mathrm{ggT}(l, mn) > 1$, was wiederum äquivalent ist dazu, dass l durch mindestens eine der Primzahlen $2, 3$ oder 7 teilbar ist. Die zweite Bedingung ist wieder äquivalent zu $l \in \{10, 10 + n, 10 + 2n, \ldots\}$. Da $n = 3 \cdot 7$ ist, aber 10 weder durch 3, noch durch 7 teilbar ist, kann $10 + an$ für keine ganze Zahl a durch 3 oder 7 teilbar sein. Deshalb muss $10 + an$ durch 2 teilbar sein, also ist a gerade. Daraus folgt, dass die möglichen l genau $l = 10, 52, 94, 136, 178, 220$ sind.

15. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Definiere folgende Relation auf G:

$$g \sim \tilde{g} \Leftrightarrow \tilde{g}^{-1} g \in H.$$

(a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeige, dass die Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen von H sind.

(c) Nimm an, die Vorschrift $[g]\circ[\tilde{g}] := [g\tilde{g}]$ definiere eine wohldefinierte binäre Operation auf G/H. Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist. (*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde die Umkehrung dieser Aussage gezeigt.)

Lösung: (a) Wir müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nachprüfen. Sei $g \in G$. Dann gilt $g^{-1}g = e \in H$, also ist $g \sim g$ und $\sim$ ist reflexiv. Seien nun $g, h \in G$ mit $g \sim h$. Das bedeutet $h^{-1}g \in H$. Dann ist auch $(h^{-1}g)^{-1} = g^{-1}h \in H$. Also folgt $h \sim g$ und die Relation ist symmetrisch. Seien nun $g, h, k \in G$ mit $g \sim h$ und $h \sim k$. Das bedeutet $h^{-1}g \in H$ und $k^{-1}h \in H$. Dann ist auch $(k^{-1}h)(h^{-1}g) = k^{-1}g \in H$. Also folgt $g \sim k$ und die Relation ist symmetrisch.

(b) Sei $g \in G$. Wir müssen zeigen, dass $[g] = gH$ gilt. Sei also $\tilde{g} \in [g]$, das heisst $\tilde{g} \sim g$. Dann existiert ein $h \in H$ mit $g^{-1}\tilde{g} = h$. Das ist äquivalent zu $\tilde{g} = gh$, also folgt $\tilde{g} \in gH$. Wir haben somit bewiesen, dass $[g] \subseteq gH$ ist. Sei nun $k \in gH$. Dann existiert ein $h \in H$ mit $k = gh$. Daraus folgt $g^{-1}k = h \in H$ und somit ist $k \sim g$. Wir haben somit $[g] \supseteq gH$ bewiesen und insgesamt folgt $[g] = gH$.

(c) Wir zeigen die Kontraposition. Sei H kein Normalteiler von G. Dann existieren $g \in G$ und $h \in H$ mit $g^{-1}hg \notin H$. Das ist äquvivalent zu $hg \notin gH$. Wegen $e \in H$ gilt $[e] = [h]$. Weiter sehen wir $[e][g] = [g]$ und $[h][g] = [hg]$. Wegen $hg \notin gH = [g]$ folgt daraus $[h][g] \neq [e][g]$. Also ist $[g] \circ [\tilde{g}] := [g\tilde{g}]$ keine wohldefinierte Operation.

16. Sei G eine Gruppe, $a \in G$ und $Z_G(a)$ der Zentralisator von a in G. Zeige:

(a) Es gilt $\langle a\rangle \leqslant Z_G(a)$.

(b) Für jede Untergruppe $H \leqslant G$ gilt $Z_H(a) = Z_G(a) \cap H$.

Lösung: (a) Sei $x \in \langle a\rangle$. Dann existiert ein $\ell \in \mathbb{Z}$ so dass $x = a^\ell$ ist. Aus der Assoziativität der Gruppenoperation folgt

$$a \cdot x = a \cdot a^\ell = a \cdot a^{\ell-1} \cdot a = a^\ell \cdot a = x \cdot a,$$

also gilt $x \in Z_G(a)$. Wir folgern daraus, dass $\langle a\rangle \leqslant Z_G(a)$ ist.

(b) Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe. Jedes Element $x \in Z_H(a)$ ist ein Element $x \in H$ so dass $x \cdot a = a \cdot x$ gilt. Also folgt auch $x \in Z_G(a)$, also liegt x im Durchschnitt $Z_G(a) \cap H$. Sei nun umgekehrt $y \in Z_G(a) \cap H$. Dann liegt $y \in H$ und es gilt nach Definition des Zentralisators $y \cdot a = a \cdot y$. Also ist $y \in Z_H(a)$. Wir folgern daraus die Gleichheit $Z_H(a) = Z_G(a) \cap H$.

17. Sei G eine Gruppe und seien U, V nichtleere Teilmengen von G. Wir definieren

$$\begin{aligned} UV &:= \{uv \mid u \in U, v \in V\} \\ U^{-1} &:= \{u^{-1} \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. U ist eine Untergruppe von G.

ii. $UU \subseteq U$ und $U^{-1} \subseteq U$.

iii. $UU^{-1} \subseteq U$.

(b) Falls U und V Untergruppen von G sind, dann ist UV genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

(c) Ist U endlich, dann ist U bereits dann eine Untergruppe, wenn $UU \subseteq U$ gilt.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst i. $\Leftrightarrow$ ii. Die Bedingung $UU \subseteq U$ ist äquivalent zu $\forall u, u' \in U\colon uu' \in U$. Die Bedingung $U^{-1} \subseteq U$ ist äquivalent zu $\forall u \in U\colon u^{-1} \in U$. Da U laut Voraussetzung nicht leer ist, ist das nach der Vorlesung äquivalent dazu, dass U eine Untergruppe ist.

Wir zeigen nun i. $\Leftrightarrow$ iii. Die Bedingung $UU^{-1} \subseteq U$ ist äquivalent zu $\forall u, u' \in U\colon uu'^{-1} \in U$. Da U laut Voraussetzung nicht leer ist, entspricht das genau der Definition einer Untergruppe aus der Vorlesung.

(b) Wir beobachten zuerst, dass für eine Untergruppe $H \leqslant G$ gilt

$$H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\} = H,$$

da die Abbildung $H \to H,\ h \mapsto h^{-1}$ bijektiv ist.

Sei $UV \leqslant G$. Nach obiger Beobachtung folgt $(UV)^{-1} \subseteq UV$. Andererseits folgt aus $U^{-1} = U$ und $V^{-1} = V$ die Gleichheit

$$(UV)^{-1} = \{uv : u \in U, v \in V\}^{-1} = \{v^{-1}u^{-1} : u \in U, v \in V\} = V^{-1}U^{-1} = VU,$$

also gilt $UV = VU$.

Sei nun $UV = VU$. Widerum gilt

$$(UV)^{-1} = \{uv : u \in U, v \in V\}^{-1} = \{v^{-1}u^{-1} : u \in U, v \in V\} = V^{-1}U^{-1} = VU,$$

also folgt $(UV)^{-1} = UV$. Ausserdem beobachten wir, dass sich das Assoziativgesetz auf Teilmengen von G übertragen lässt. Seien nämlich $A, B, C \subseteq G$ alle nicht leer. Dann gilt

$$(AB)C = \{ab : a \in A, b \in B\}C = \{abc : a \in A, b \in B, c \in C\} = A(BC).$$

Also ist

$$\begin{aligned}(UV)(UV) &= \{uvu'v' : u, u' \in U, v, v' \in V\} \\ &= (U(VU))V = (U(UV))V = (UU)(VV) \subseteq UV.\end{aligned}$$

Weiters ist wegen $U \neq \varnothing \neq V$ auch $UV \neq \varnothing$. Daher ist UV nach Teil (a) eine Untergruppe von G.

(c) Wir müssen nachprüfen, dass $U^{-1} \subseteq U$ gilt. Sei $u \in U$. Falls $u = e$ ist, dann gilt trivialerweise auch $u^{-1} = e \in U$. Sei nun $u \neq e$. Da G eine Gruppe ist, existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $u^l = 1$. Wähle l minimal. Dann ist $1 < l \leqslant |U|$. Es gilt äquivalenterweise $u^{-1} = u^{l-1}$. Wir definieren induktiv $U^1 := U$ und

$$U^n := UU^{n-1} = \{u_1u_2 \dots u_n : u_1, \dots, u_n \in U\}.$$

Also ist $u^{-1} \in U^{l-1} = (UU)U^{l-3} \subseteq UU^{l-3} = U^{l-2} \subseteq \dots \subseteq U$. Das beweist $U^{-1} \subseteq U$. Da U nach Voraussetzung nicht leer ist, ist es somit eine Untergruppe von G.

18. Sei $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{U}$ ein Normalteiler von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist.

(b) Beschreibe die Menge $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$.

Lösung: (a) Offensichtlich gilt $1 \in \mathbb{U}$. Ausserdem gilt für alle $w, z \in \mathbb{C}^*$ die Gleichheit $|w^{-1}z| = |w|^{-1}|z|$. Wenn $w, z \in \mathbb{U}$ sind, gilt also auch $|w^{-1}z| = 1$ und somit $w^{-1}z \in \mathbb{U}$. Deshalb ist $\mathbb{U}$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$. Da komplexe Multiplikation kommutativ ist, ist $\mathbb{U}$ damit automatisch ein Normalteiler.

(b) Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ können wir in Polarkoordinaten als $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}$ schreiben. Ausserdem ist $\mathbb{U} = \{re^{i\vartheta} : \vartheta \in \mathbb{R}\}$. Damit sehen wir

$$z\mathbb{U} = \{re^{i(\varphi+\vartheta)} : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \{re^{i\vartheta} : \vartheta \in \mathbb{R}\}.$$

Die Menge $z\mathbb{U}$ ist somit der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $|z|$.

19. Finde alle Untergruppen von D_4 sowie alle Inklusionen zwischen diesen. Gib an, in welchen Fällen es sich um einen Normalteiler handelt.

Lösung: Die Diedergruppe D_4 mit 8 Elementen ist die Symmetriegruppe des Quadrates und besteht aus der Identität, drei Rotationen T, T^2, T^3 (um $\frac{\pi}{2}$, um π und um $\frac{3\pi}{2}$) und 4 Spiegelungen S, ST, ST^2, ST^3.

Sei H eine Untergruppe von D_4. Wir unterscheiden vier Fälle:

- H ist die triviale Untergruppe $\{1\}$.
- H ist nicht trivial und besteht nur aus Rotationen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten für H. Falls H nämlich T oder T^3 enthält, dann umfasst H auch alle anderen Rotationen (insbesondere die Identität!) und ist zyklisch von Ordnung 4, da sich alle Rotationen als Potenzen von T bzw. $T^3 = T^{-1}$ schreiben lassen. Andernfalls besteht H aus der Identität und der Rotation T^2 um π und ist zyklisch von Ordnung 2.
- H besteht aus der Identität und einer Spiegelung. Da $S'^2 = 1$ für jede Spiegelung S' gilt, bildet jede Spiegelung mit der Identität zusammen eine Untergruppe von D_4. Somit gibt es in diesem Fall vier Möglichkeiten für H (alle zyklisch von Ordnung 2).
- H enthält die Identität, eine Spiegelung S' und mindestens ein weiteres Element. Dieses ist entweder eine Spiegelung ungleich S' oder eine nicht-triviale Rotation. Falls es eine Spiegelung ist, ist seine Verknüpfung mit S' eine nicht-triviale Rotation. Deshalb enthält H sicher eine nicht-triviale Rotation R.

  Falls $R = T$ oder $R = T^3$ ist, umfasst H wie im zweiten Fall auch alle anderen Rotationen und auch alle 4 Spiegelungen, da $S', S'R, S'R^2, S'R^3$ paarweise verschiedene Spiegelungen sind. In diesem Fall ist also $H = D_4$.

  Andernfalls ist $R = T^2$ eine Rotation um π und H enthält keine weiteren nicht-trivialen Rotationen. Dann ist $H = \{1, S', T^2, S'T^2\}$ eine Diedergruppe mit 4 Elementen, denn H enthält die beiden Spiegelungen $S'T$ und $S'T^3$ nicht, da T und T^3 keine Elemente von H sind. Es gibt genau zwei solche Möglichkeiten für H, denn $\{S', S'T^2\} = \{S, ST^2\}$ oder $\{S', S'T^2\} = \{ST, ST^3\}$. Die Untergruppe H enthält also entweder die Spiegelungen an den Diagonalen des Quadrates oder diejenigen an den zu den Quadratseiten parallelen Symmetrieachsen.

Insgesamt hat H somit 10 Untergruppen mit folgenden Inklusionen (bei den unterstrichenen Untergruppen handelt es sich um Normalteiler, siehe unten):

$$
\begin{tikzcd}
 & & \underline{D_4} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \underline{\langle S, T^2 \rangle} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \underline{\langle T \rangle} \arrow[d, dash] & \underline{\langle ST, T^2 \rangle} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle S \rangle \arrow[drr, dash] & \langle ST^2 \rangle \arrow[dr, dash] & \underline{\langle T^2 \rangle} \arrow[d, dash] & \langle ST \rangle \arrow[dl, dash] & \langle ST^3 \rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \underline{\{1\}} & &
\end{tikzcd}
$$

Wir überprüfen nun für je zwei Untergruppen H, H' von D_4 mit $H' \subseteq H$, ob $H' \lhd H$ gilt. Da jede Gruppe der Ordnung 1, 2 oder 4 abelsch ist und jede Untergruppe einer abelschen Gruppe normal ist, ist $H' \lhd H$ immer erfüllt, wenn $H \neq D_4$.

Offensichtlich sind $\{1\}$ und D_4 Normalteiler von D_4. Durch explizites Einsetzen stellen wir fest, dass dass alle Untergruppen mit 4 Elementen, also $\langle T \rangle$, $\langle S, T^2 \rangle$ und $\langle ST, T^2 \rangle$, Normalteiler von D_4 sind (später wird dies aus einer allgemeineren Aussage über den Index folgen). Die Untergruppen $\langle S \rangle$, $\langle ST \rangle$, $\langle ST^2 \rangle$ und $\langle ST^3 \rangle$ sind keine Normalteiler von D_4, denn sie sind nicht abgeschlossen unter Konjugation mit dem Element T. Schliesslich können wir wieder durch explizites Einsetzen überprüfen, dass $\langle T^2 \rangle$ ein Normalteiler von D_4 ist.

Bemerkung: Es gilt zwar $\langle S \rangle \lhd \langle S, T^2 \rangle$ und $\langle S, T^2 \rangle \lhd D_4$, aber nicht $\langle S \rangle \lhd D_4$. Wir haben also an einem Gegenbeispiel gezeigt, dass für Untergruppen M, N, K einer Gruppe G

$$(M \lhd N \wedge N \lhd K) \not\Rightarrow M \lhd K.$$

20. Sei T die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

(a) Bestimme $|T|$.

(b) Zeige, dass T nicht abelsch ist.

(c) Bestimme alle Untergruppen von T.

(d) Welche Untergruppen von T sind nichttriviale Normalteiler?

Lösung: (a) Ein Tetraeder hat vier Seitenflächen. Ein Element der Symmetriegruppe kann die Grundfläche F so auf jede der vier Seitenflächen abbilden, dass eine beliebige Ecke von F auf eine bestimmte der drei Ecken der Seitenfläche abgebildet wird. Dadurch ist die Bewegung des Tetraeders eindeutig bestimmt. Es gibt also insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten, somit ist $|T| = 12$.

(b) Bezeichne mit A, B, C, D die Ecken des Tetraeders. Betrachte das nichttriviales Element $R_D \in T$ mit $\sigma(D) = D$, das A, B, C zyklisch vertauscht und das Element $R_A \in T$, das A fest lässt und B, C, D zyklisch vertauscht. Dann gilt $R_D \circ R_A(A) = B$, aber $R_A \circ R_D(A) = C$.

(c) Das Element R_A erzeugt die Untergruppe von T, die die Ecke A fest lassen. Diese ist isomorph zu C_3, hat also keine weiteren Untergruppen mehr. Bezeichne analog R_B das Element, das C, D, A zyklisch vertauscht und R_C das Element, das D, A, B zyklisch vertauscht. Genauso erzeugen R_B, R_C und R_D Untergruppen isomorph zu C_3, die eine Ecke fest lassen.

Sei nun $\sigma \in T$ mit $\sigma(A) = B$. Falls $\sigma(B) = A$ gilt, dann vertauscht σ auch B und C. Wir bezeichnen dieses Element σ mit $S_{AB} = S_{CD}$. Es erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 2. Analog bekommen wir Elemente $S_{AC} = S_{BD}$ und S_{AD}, die Untergruppen der Ordnung 2 erzeugen.

Falls $\sigma(B) = C$ gilt, lässt σ das Dreieck A, B, C und daher die Ecke D invariant. Diesen Fall haben wir schon betrachtet.

Da $|T| = 12$ ist, gilt

$$T = \{e, R_A, R_A^2, R_B, R_B^2, R_C, R_C^2, R_D, R_D^2, S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\}.$$

Das Produkt von zwei verschiedenen Elementen aus der Menge $\{S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\}$ ergibt jeweils das dritte. Also ist $\{e, S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\} = \langle S_{AB}, S_{AC}\rangle \cong C_2 \times C_2$.

Wir wollen zeigen, dass die Liste $\{e\}$,$\langle R_A\rangle$, $\langle R_B\rangle$, $\langle R_C\rangle$, $\langle R_D\rangle$, $\langle S_{AB}\rangle$, $\langle S_{AC}\rangle$, $\langle S_{AD}\rangle$, $\langle S_{AB}, S_{AC}\rangle$ und T bereits alle Untergruppen umfasst.

Eine Untergruppe von T hat Ordnung $1, 2, 3, 4, 6$ oder 12. Die Liste enthält sicher alle Untergruppen der Ordnungen 1 und 12, da nur die triviale Gruppe und die ganze Gruppe diese Ordnungen haben können. Weiter enthält die Liste offenbar alle zyklischen Untergruppen von T und deshalb sind bereits alle Untergruppen der Ordnung 2 und 3 vertreten. Eine Untergruppe der Ordnung 4 darf kein Element der Ordnung 3 enthalten, da die Ordnung jedes Elements die Gruppenordnung teilt. Es gibt in T aber nur vier Elemente, die nicht Ordnung 3 haben. Deshalb ist $\langle S_{AB}, S_{AC}\rangle$ die einzige Untergruppe der Ordnung 4.

Eine Untergruppe H der Ordnung 6 muss isomorph zu C_6 oder D_3 sein, da dies bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 6 sind. Ausserdem muss sie nach dem Satz von Lagrange Index 2 haben und deshalb ein Normalteiler sein. Da die Liste zwar alle zyklischen Untergruppen von T enthält, aber keine, die isomorph zu C_6 ist, muss $H \cong D_3$ gelten. Dann enthält H ein Element der Ordnung 2 und ein Element der Ordnung 3. Wegen Symmetrie können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $R_A \in H$ liegt, also $\langle R_A\rangle \leqslant H$. Es gilt $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B(D) = D$, also ist $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B \in \{R_D, R_D^2\}$. Wegen Normalität und wegen $R_D^2 = R_D^{-1}$ folgt $R_D \in H$, analog liegen ebenso $R_B, R_C \in H$ und natürlich auch deren Quadrate. Somit hat H bereits acht Elemente der Ordnung 3, was bei $|H| = 6$ nicht sein kann. Deshalb kann T keine Untergruppe der Ordnung 6 haben und obige Liste ist vollständig.

Wegen $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B \in \{R_D, R_D^{-1}\}$ sind die Gruppen $\langle R_A\rangle$ und $\langle R_D\rangle$ zueinander konjugiert. Analog sind diese Gruppen auch konjugiert zu $\langle R_B\rangle$ und $\langle R_C\rangle$. Insbesondere ist keine dieser Untergruppen normal in T.

Eine zu $\langle S_{AB}, S_{AC}\rangle$ konjugierte Untergruppe von T muss ebenfalls Ordnung 4 haben. Da $\langle S_{AB}, S_{AC}\rangle$ die einzige solche Untergruppe von T ist, ist sie somit normal.

Zuletzt rechnen wir $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A(A) = D$ und $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A(D) = A$, also gilt $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A = S_{AD}$. Deshalb sind $\langle S_{AB}\rangle$ und $\langle S_{AD}\rangle$ zueinander konjugiert. Analog sehen wir, dass alle Untergruppen der Ordnung 2 zueinander konjugiert sind.