Musterlösung Serie 3

HOMOMORPHISMEN, GRUPPENOPERATIONEN

21. Zeige: Gilt $N \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$ und ist G/N zyklisch, so ist G abelsch.

Lösung: Sei G/N erzeugt von xN für ein $x \in G$. Für jedes Element g von G gibt es dann eine ganze Zahl n mit $gN = x^n N$, also insbesondere mit $g \in x^n N$. Daher erzeugen N und x die ganze Gruppe G. Da sowohl N (als Teilmenge des Zentrums von G) als auch x im Zentralisator $Z_G(x)$ von x liegen und $Z_G(x)$ eine Untergruppe ist, folgt deshalb $Z_G(x) = G$. Dies ist äquivalent dazu, dass x im Zentrum von G liegt. Das Zentrum enthält aber auch N, also ausserdem die von N und x erzeugte Untergruppe. Somit ist es ebenfalls gleich ganz G. Daher ist G abelsch.

Variante: Für beliebige Elemente $g,\ h$ gibt es ganze Zahlen m und n mit $gN = x^m N$ und $hN = x^n N$. Daher existieren $a,\ b \in N \subset Z(G)$ mit $g = x^m a$ und $h = x^n b$. Da a und b im Zentrum liegen, folgt

$$gh = x^m a x^n b = x^m x^n ab = x^n x^m ba = x^n b x^m a = hg.$$

Somit ist G abelsch.

22. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

(a) Zeige, dass die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$ eine Gruppenoperation definiert.

(b) Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Das bedeutet, dass die Operation nur eine Bahn besitzt.

(c) Bestimme ihre Stabilisatoren.

Lösung: (a) Wir müssen zwei Bedingungen nachprüfen, nämlich

- für alle $g, h, g' \in G$ gilt $(gh)g'H = g(hg'H)$ und
- für alle $g' \in G$ gilt $eg'H = g'H$.

Beide sind wegen der Assoziativität der Multiplikation in G offensichtlich erfüllt.

(b) Seien $g', g'' \in H$. Dann liegen wegen $(g''g'^{-1})g'H = g''H$ die Nebenklassen $g'H$ und $g''H$ in derselben Bahn. Somit gibt es nur eine Bahn und die Operation ist transitiv.

(c) Sei $g' \in G$. Dann ist $\mathrm{St}_G(g'H) = \{g \in G : gg'H = g'H\} = \{g \in G : g'^{-1}gg' \in H\}$.

23. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen operiere auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$g \circ (a, b) = \left(ga, \frac{b}{g}\right),$$

wobei $g \in \mathbb{R}^*$ und $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

Lösung: Die Bahn eines Elements $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\mathbb{R}^*(a,\, b) = \{(ta,\, b/t)\ :\ t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Es gibt damit folgende Bahnen:

- $a, b \neq 0$: Hyperbeln $xy = ab$, denn jeder Punkt einer solchen Hyperbel erfüllt $x = ta,\ y = b/t$ mit $t = b/y = x/a \neq 0$.
- $a = 0,\ b \neq 0$: y-Achse ohne Ursprung.
- $b = 0,\ a \neq 0$: x-Achse ohne Ursprung.
- $(a,b) = (0,0)$: Ursprung.

Der Stabilisator von $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}^*$ mit $ta = a,\ b/t = b$. Diese ist $\{1\}$ für $(a,b) \neq (0,0)$ und $\mathbb{R}^*$ für $(a,b) = (0,0)$.

24. Sei $G \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei f eine Auswahlfunktion der Menge der Bahnen M/G, *d.h.* $f\colon M/G \to M$ und für jedes $N \in M/G$ ist $f(N) \in N$.

Zeige, dass gilt

$$|M| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big] .$$

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass für jedes $x \in X$ gilt $[G : \mathrm{St}_G(x)] = |Gx|$. Ausserdem gilt mit $N = Gf(N)$ auch

$$M = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} N = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} Gf(N).$$

Zusammengefasst heisst das

$$|M| = \Big|\dot{\bigcup}_{N \in M/G} N\Big| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big].$$

25. Sei $G \times M \to M$, $(g,x) \mapsto g \circ x$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ (g\,,\, f) & \mapsto & g * f \quad \text{mit} \ \ (g * f)(x) := f(g^{-1} \circ x) \end{array}$$

eine Gruppenoperation ist und bestimme ihre Fixpunkte.

Lösung: Wir müssen zwei Bedingungen nachprüfen, nämlich

- für alle $g, h \in G$ und alle $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt $(g * (h * f))(x) = ((gh) * f)(x)$ und
- für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt $1_G * f = f$.

Die zweite Bedingung folgt direkt aus der Gleichung

$$(1_G * f)(x) = f(1_G^{-1} \circ x) = f(x)$$

für alle $x \in M$. Für die erste rechnen wir

$$(g * (h * f))(x) = (h * f)(g^{-1} \circ x) = f(h^{-1}(g^{-1} \circ x)) = f((gh)^{-1} \circ x) = ((gh) * f)(x).$$

Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ ist genau dann ein Fixpunkt für die Operation, wenn für jedes $x \in M$ und $g \in G$ gilt $f(x) = f(g^{-1} \circ x)$. Das ist genau dann der Fall, wenn f konstant auf den Bahnen der Operation $\circ$ ist, also wenn f Elemente derselben Bahn auf dieselbe reelle Zahl abbildet.