D-MATH | Algebra I | HS 2024

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Musterlösung Serie 4

ABZÄHLPROBLEME, HOMOMORPHISMEN, UNTERGRUPPE VON SO(3)

---

26. Wir mischen drei identische Kartendecks mit je 36 paarweise verschiedenen Karten. Wie viele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?

Lösung: Wir nummerieren die Karten der jeweiligen Decks von 1 bis 36. Wir ziehen nun 3 Karten und schreiben die zugehörigen Nummern in ein Tupel $(a, b, c) \in \{1, \dots, 36\}^3$. Wir bezeichnen mit A die gesuchte Anzahl Kombinationen von 3 Karten. Weil wir an der Anzahl Kombinationen interessiert sind, wollen wir nicht die Anzahl aller Tupel bestimmen, sondern die Anzahl Tupel modulo Vertauschung der Karten, weil die Kombination (a, b, c) zum Beispiel die gleiche Kombination wie (b, c, a) definiert. Daher betrachten wir die Operation der Symmetrischen Gruppe S_3 auf $X := \{1, \dots, 36\}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} S_3 \times X &\to X \\ (\sigma, (a_1, a_2, a_3)) &\mapsto (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \end{aligned}$$

Die Anzahl A ist jetzt gegeben durch die Anzahl Bahnen der Operation:

$$A = |X/S_3|.$$

Wir wollen Proposition 3.6 aus der Vorlesung verwenden und berechnen zuerst die Anzahl Fixpunkte für jedes Gruppenelement $g \in S_3$.

Die Gruppe S_3 besteht aus den 6 Elementen

$$(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2).$$

Für $g = (1)$ ist jedes Tupel ein Fixpunkt der Operation, also ist $|{}^{(1)}X| = 36^3$. Das Element $(1\ 2)$ bildet ein Tupel (a, b, c) auf (b, a, c) ab. Die Fixpunkte sind also alle Tupel (a, a, c). Es gibt 36^2 solche Tupel, also $|{}^{(1\ 2)}X| = 36^2$. Für die Elemente $(1\ 3)$ und $(2\ 3)$ folgt mit dem gleichen Argument $|{}^{(1\ 3)}X| = |{}^{(2\ 3)}X| = 36^2$. Das Element $(1\ 2\ 3)$ bildet ein Tupel (a, b, c) auf (c, a, b) ab. Daher sind die Fixpunkte alle Tupel der Form (a, a, a), wovon es 36 gibt. Wir folgern daraus, dass $|{}^{(1\ 2\ 3)}X| = |{}^{(1\ 3\ 2)}X| = 36$ gilt. Wir wenden nun Proposition 3.6 an und erhalten:

$$\begin{aligned} A = |X/S_3| &= \frac{1}{|S_3|}\left(|{}^{(1)}X| + |{}^{(1\ 2)}X| + |{}^{(1\ 3)}X| + |{}^{(2\ 3)}X| + |{}^{(1\ 2\ 3)}X| + |{}^{(1\ 3\ 2)}X|\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(36^3 + 36^2 + 36^2 + 36^2 + 36 + 36\right) \\ &= 8436 \end{aligned}$$

27. Wir betrachten eine geschlossene Perlenkette mit 13 Perlen. Wir wollen die Perlen mit 4 Farben einfärben. Wie viele Kombinationen von Färbungen gibt es? Wie viele Kombinationen gibt es, wenn wir nur 12 von den 13 Perlen färben wollen und die verbleibende Perle belassen?

Lösung: Seien E die Menge der Ecken des gleichseitigen Polygons mit 13 Ecken und F eine Menge von vier verschiedenen Farben. Die Gruppe D_{13} wirkt auf E durch Einschränkung der Wirkung von D_{13} auf dem Polygon mit 13 Ecken.

Zuerst zählen wir die Färbungen von 13 Perlen. Die Symmetriegruppe D_{13} wirkt auf der Menge aller Färbungen von 13 Perlen $M := F^E$ wie folgt. Sei $g \in D_{13}$ und $f \in M$, dann definieren wir $(g \circ f)(e) := f(g^{-1} \circ e)$.

Sei $g \in D_{13}$, dann unterscheiden wir drei Fälle:

- Falls $g = e$, dann ist jede Färbung der Kette invariant. Also $|{}^g M| = 4^{13}$.
- Falls g eine nicht-triviale Rotation ist, dann wirkt g transitiv auf E weil 13 eine Primzahl ist. Also ist die konstante Färbung die einzige Färbung, welche invariant ist unter g. Somit gilt $|{}^g M| = 4$. Es gibt 12 solche Rotationen in D_{13}.
- Falls g eine Spiegelung ist, dann hat die Wirkung von g auf E einen Fixpunkt und 6 Bahnen, welche aus genau zwei Elementen bestehen. Also $|{}^g M| = 4^7$. Es gibt 13 solche Elemente in D_{13}.

Burnside's Lemma besagt nun

$$|M/D_{13}| = \frac{1}{26}(4^{13} + 12 \cdot 4 + 13 \cdot 4^7) = 2‘589‘304.$$

Nun zählen wir die Färbungen von einer Perlenkette mit 13 Perlen, wobei wir eine Perle ungefärbt lassen. Wir definieren

$$N := \bigcup_{e \in E} F^{E \setminus \{e\}}.$$

Die Gruppe D_{13} wirkt auf N wie folgt. Sei $g \in D_{13}$ und $f \in N$, dann existiert eine Ecke $e_0 \in E$, so dass $f \in F^{E\setminus\{e_0\}}$. Wir definieren $g \circ f \in F^{E\setminus\{g \circ e_0\}}$ als $(g \circ f)(e) := f(g^{-1} \circ e)$.

Sei $g \in D_{13}$, dann unterscheiden wir drei Fälle:

- Falls $g = e$, dann ist jede Färbung der Kette invariant. Also $|{}^g N| = 13 \cdot 4^{12}$.
- Falls g eine nicht-triviale Rotation ist, dann wirkt g transitiv auf E. Weil eine Ecke nicht gefärbt wurde, kann keine Färbung invariant sein. Also $|{}^g N| = 0$.
- Falls g eine Spiegelung ist, dann hat die Wirkung von g auf E einen Fixpunkt und 6 Bahnen, welche aus genau zwei Elementen bestehen. Eine Färbung ist dann und nur dann invariant, falls der Fixpunkt von g nicht gefärbt wurde und die Perlen innerhalb einer Bahn gleich gefärbt wurden. Also $|{}^g N| = 4^6$.

Nun erhalten wir nach Burnside's Lemma

$$|N/D_{13}| = \frac{1}{26}(13 \cdot 4^{12} + 12 \cdot 0 + 13 \cdot 4^6) = 8‘390‘656.$$

28. Seien $(G, \cdot, 1_G)$ und $(H, \cdot, 1_H)$ zwei Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) Es gilt $\varphi(1_G) = 1_H$.

(b) Für jedes Element $x \in G$ gilt $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

(c) Das Bild $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(d) Für jede Untergruppe $M \leqslant H$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G.

Lösung: (a) Für alle $g \in G$ gilt $\varphi(g) = \varphi(1_G \cdot g) = \varphi(1_G) \cdot \varphi(g)$, also ist $\varphi(1_G)$ das neutrale Element 1_H in H.

(b) Sei $x \in G$. Es gilt

$$\varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(1_G) = 1_H$$

mit Teil (a). Also ist $\varphi(x^{-1})$ das inverse Element von $\varphi(x)$.

(c) Weil G als Gruppe nichtleer ist, ist auch $\varphi(G)$ nichtleer. Seien nun $a, b \in \varphi(G)$. Dann existieren $x, y \in G$ mit $\varphi(x) = a$ und $\varphi(y) = b$. Mit Teil (b) folgt

$$a \cdot b^{-1} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = \varphi(x) \cdot \varphi(y^{-1}) = \varphi(xy^{-1}) \in \varphi(G).$$

Daher ist $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H.

(d) Sei $M \leqslant H$ eine Untergruppe. Seien $a, b \in \varphi^{-1}(M)$, das heisst $\varphi(a) \in M$ und $\varphi(b) \in M$. Dann ist

$$\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$$

in M, weil M eine Untergruppe von H ist. Daher folgt, dass $a \cdot b^{-1} \in \varphi^{-1}(M)$ liegt, also ist $\varphi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G.

29. Zeige, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Finde jeweils den Kern und das Bild.

(a) Die Betragsfunktion: $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad z \mapsto |z|$.

(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad f(x) := e^{ix}$.

(c) $g : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad g(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

Lösung: (a) Aus der Analysis wissen wir, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $|wz| = |w||z|$ gilt. Das bedeutet, dass die Betragsfunktion ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir können in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ schreiben. Es gilt $|z| = r$. Also ist das Bild der Betragsfunktion genau $\mathbb{R}^+$. Ausserdem gilt genau dann $|z| = 1$, wenn $r = 1$ gilt. Der Kern ist also $\mathbb{U}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus der Analysis wissen wir, dass $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ gilt. Das bedeutet, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist. Der Kern von f ist $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$. Das Bild von f ist $\mathbb{U}$.

(c) Betrachten wir die Einträge einer Matrix $g(s)g(t)$ für reelle s und t, merken wir, dass wir folgendes berechnen müssen:

$$\cosh(s)\cosh(t)+\sinh(s)\sinh(t) = \frac{(e^s+e^{-s})(e^t+e^{-t})}{4}+\frac{(e^s-e^{-s})(e^t-e^{-t})}{4} =$$
$$= \frac{e^{s+t}+e^{-s-t}}{2} = \cosh(s+t)$$

und

$$\cosh(s)\sinh(t)+\sinh(s)\cosh(t) = \frac{(e^s+e^{-s})(e^t-e^{-t})}{4}+\frac{(e^s-e^{-s})(e^t+e^{-t})}{4} =$$
$$= \frac{e^{s+t}-e^{-s-t}}{2} = \sinh(s+t)$$

so dass

$$g(s)g(t) = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(s+t) & \sinh(s+t) \\ \sinh(s+t) & \cosh(s+t) \end{pmatrix} = g(s+t).$$

Daher ist g ein Gruppenhomomorphismus.

Nun berechnen wir den Kern von g. Es gilt

$$\ker(g) = \{s \in \mathbb{R} : \cosh(s) = 1, \sinh(s) = 0\} = \{0\}$$

weil $\sinh(s) = 0$ äquivalent ist zu $e^x = e^{-x}$, also $x = 0$ (wegen $x \in \mathbb{R}$). Daher ist die Abbildung g injektiv, und $\mathbb{R} \cong g(\mathbb{R})$. Es gilt

$$g(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} : x^2 - y^2 = 1, x > 0 \right\} \leqslant \{A \in SL_2(\mathbb{R}) | A^T = A\}.$$

30. Seien φ und ψ folgende Rotationen aus $\mathrm{SO}(3)$:

- φ sei Drehung um π um diejenige Achse, die durch Verbinden des Ursprungs mit dem Punkt $(1, 0, 1)$ entsteht. Die Darstellungsmatrix von φ ist:
$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- ψ als Drehung sei die Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um die z-Achse. Die Darstellungsmatrix von ψ ist:
$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt aufgrund der gewählten Drehwinkel für die Identitätsabbildung ι:

$$\varphi^2 = \iota = \psi^3$$

(a) Zeige mittels Induktion nach n, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ und für alle $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ gilt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{Z}$ gerade und $a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{Z}$ ungerade sind.

(b) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi \notin \{\iota, \varphi\}$$

(c) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$, für alle $\varepsilon_k = \pm 1$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$, sowie für $\varepsilon_0 \in \{0, 1\}$ und $\varepsilon_{n+1} \in \{0, \pm 1\}$ gilt:

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} \neq \iota$$

Mit anderen Worten: Die einzigen Relationen zwischen φ und ψ sind $\varphi^2 = \iota = \psi^3$.

Lösung: (a) Wir nutzen Induktion nach n. Da $\psi^3 = \iota$, folgt

$$\psi^{-1} = \psi^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei $n = 1$. Dann ist

$$\psi\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also haben wir die gewünschte Form mit $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$ gerade, und $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$ ungerade. Ebenso ist

$$\psi^{-1}\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und auch diese Matrix hat die gewünschte Form.

Sei nun $n > 1$ und wir nehmen an, dass wir die Aussage für $n-1$ bewiesen haben. Also gilt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12}\sqrt{3} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21}\sqrt{3} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23}\sqrt{3} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32}\sqrt{3} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

für ganze Zahlen $\tilde{a}_{ij}$, mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$, welche die gewünschten Voraussetzungen erfüllen. Wir rechnen

$$\psi\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi) = \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}}\begin{pmatrix} 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31} & (\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{32})\sqrt{3} & 3\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{33} \\ (\tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31})\sqrt{3} & \tilde{a}_{22} + 3\tilde{a}_{32} & (\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33})\sqrt{3} \\ 2\tilde{a}_{11} & 2\tilde{a}_{12}\sqrt{3} & 2\tilde{a}_{13} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
a_{11} &:= 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31}, & a_{12} &:= \tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{32}, & a_{13} &:= 3\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{33}, \\
a_{21} &:= \tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31}, & a_{22} &:= \tilde{a}_{22} + 3\tilde{a}_{32}, & a_{23} &:= \tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33}, \\
a_{31} &:= 2\tilde{a}_{11}, & a_{32} &:= 2\tilde{a}_{12}, & a_{33} &:= 2\tilde{a}_{13}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\psi\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi) = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ sind $\tilde{a}_{i1}$ gerade. Somit sind $a_{11} = 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31}$ und $a_{21} := \tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31}$ beide gerade. Weiterhin sind offensichtlich a_{31}, a_{32} und a_{33} gerade. Da $\tilde{a}_{22}$ ungerade und $\tilde{a}_{32}$ gerade ist, folgt dass $\tilde{a}_{22} \pm \tilde{a}_{32}$ ungerade ist. Somit sind a_{12} und a_{22} beide ungerade zahlen. Weil $\tilde{a}_{23}$ ungerade und $\tilde{a}_{33}$ gerade ist, folgt ähnlich dass a_{13} und a_{23} beide ungerade Zahlen sind. Wir folgern, dass unsere neuen Zahlen ebenfalls die Voraussetzungen erfüllen. Das ganze müssen wir nun für

$$\psi^{-1}\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi)$$

wiederholen und finden die gleiche Form. Durch Induktion folgt die Aussage.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und angenommen $\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi \in \{\iota, \varphi\}$. Mit der Formel aus Teil (a) folgt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix} \in \{\iota, \varphi\},$$

für a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ wie in Teil (a). Dann ist $a_{12} = 0$, also gerade, aber nach Annahme sollte a_{12} ungerade sein. Widerspruch.

(c) Wir nehmen per Widerspruch an, dass ein $n \geqslant 1$ existiert mit

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} = \iota.$$

Dann folgt

$$\left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} = \varphi^{\varepsilon_0}.$$

Falls $\varepsilon_{n+1} = 0$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch nach Teil (b). Falls $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$ ist, folgt

$$\left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}}\varphi = \varphi^{\varepsilon_0 + 1},$$

also ist das wieder, mit der gleichen Argumentation wie in Teil (b), ein Widerspruch.

Wir folgern, dass unsere Annahme falsch war, also gilt

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} \neq \iota.$$