Musterlösung Serie 5

CAYLEY-GRAPHEN, ISOMORPHIESÄTZE, AUFLÖSBARE GRUPPEN

---

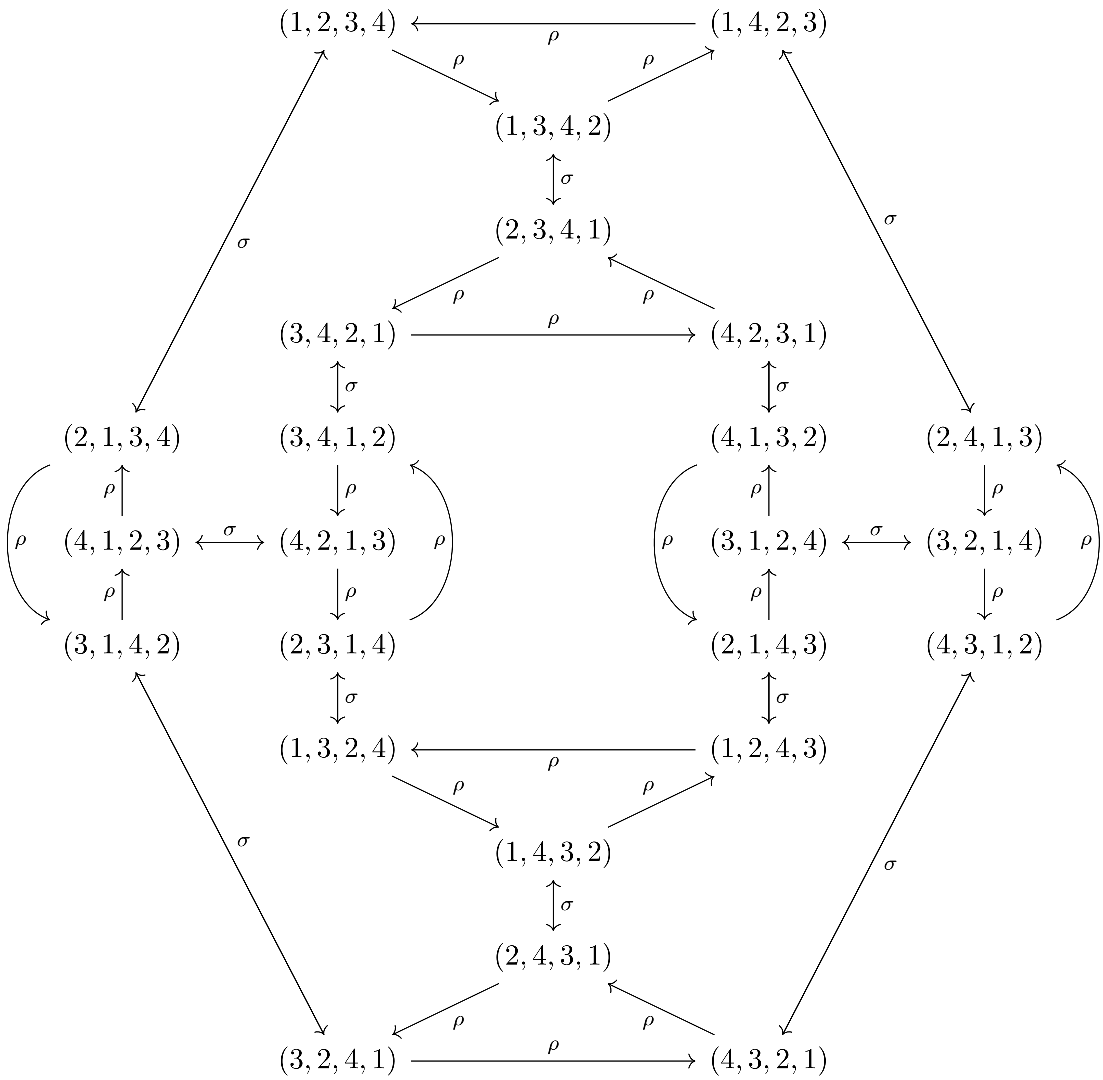
30. Stelle den Cayley-Graph von D_4 dar bezüglich der zwei Erzeuger σ und ρ, wobei σ Ordnung 2 und ρ Ordnung 4 besitzt und es gilt $\sigma\rho\sigma = \rho^3$.

Lösung:

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[ddd, "\rho"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sigma"'] & & & & \sigma\rho \arrow[llll, "\rho"'] \arrow[dl, leftrightarrow, "\sigma"] \\
& 1 \arrow[rr, "\rho"] & & \rho \arrow[d, "\rho"] & \\
& \rho^3 \arrow[u, "\rho"] \arrow[dl, leftrightarrow, "\sigma"] & & \rho^2 \arrow[ll, "\rho"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sigma"] & \\
\sigma\rho^3 \arrow[rrrr, "\rho"] & & & & \sigma\rho^2 \arrow[uuu, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

31. Betrachte einen Würfel mit den vier Raumdiagonalen x_1, x_2, x_3, x_4. Stelle den Cayley-Graph seiner Symmetriegruppe S_4 dar bezüglich den zwei Erzeugern ρ und σ, wobei ρ die $120°$-Drehung um die Achse x_1 ist und σ die $180°$-Drehung ist, die x_1 und x_2 vertauscht und x_3 und x_4 je auf sich abbildet.

Lösung: Wegen $|S_4| = 24$ suchen wir 24 Gruppenelemente. Wir nutzen Zykelnotation wie in Aufgabe 26 erklärt und bemerken, dass $\rho = (2\ 3\ 4)$ und $\sigma = (1\ 2)$ gilt. Wir stellen die möglichen Gruppenelemente durch ihre Wirkung auf die 4 Raumdiagonalen dar, also durch Positions-Tupel (a_1, a_2, a_3, a_4), wobei x_i auf x_{a_i} gesendet wird. Das Tupel $(2, 4, 1, 3)$ bedeutet also zum Beispiel, dass x_1 auf x_2, x_2 auf x_4, x_3 auf x_1, x_4 auf x_3 gesendet wird. Der Cayley-Graph sieht dann wie folgt aus:



32. *Dritter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe und seien N, M Normalteiler von G mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$

Lösung: Betrachte $\varphi\colon G/M \to G/N$, $\varphi(gM) = gN$. Wir müssen zuerst zeigen, dass das eine wohldefinierte Abbildung ist. Seien $g, g' \in G$ mit $gM = g'M$. Dann folgt $g'g^{-1} \in M \leqslant N$, also gilt auch $\varphi(g'M) = g'N = gN = \varphi(gM)$, also ist φ wohldefiniert. Weiter ist φ ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $g, g' \in G$ die Gleichung $\varphi(gMg'M) = \varphi(gg'M) = gg'N = gNg'N = \varphi(gM)\varphi(g'M)$ gilt. Surjektivität von φ ist offensichtlich. Der Kern von φ ist $\ker(\varphi) = \{gM \in G/M : gN = N\} = N/M$. Also ist N/M eine normale Untergruppe von G/M. Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt nun $G/N \cong (G/M)/\operatorname{Ker}(\varphi) = (G/M)/(N/M)$.

33. Sei G eine Gruppe.

(a) Zeige: Falls $N \trianglelefteq G$ existiert, so dass N und G/N auflösbar sind, dann ist G auflösbar.

(b) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = p^n$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Beweise mit Induktion über n, dass die Gruppe G auflösbar ist.

Lösung:

(a) Nach Annahme existieren Untergruppen

$$\{e_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_m = N,$$

so dass die Faktorgruppen G_{i+1}/G_i abelsch sind für alle $0 \leqslant i < m$. Es existieren Untergruppen

$$\{e_{G/N}\} = H_m \trianglelefteq H_{m+1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G/N.$$

so dass die Faktorgruppen H_{i+1}/H_i abelsch sind für alle $m \leqslant i < n$. Sei $\pi \colon G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus, dann definieren wir

$$G_i := \pi^{-1}(H_i)$$

für alle $m \leqslant i < n$. Wir betrachten die Abbildung $G_{i+1} \to H_{i+1}/H_i, g \mapsto \pi(g)H_i$. Diese Abbildung ist surjektiv mit Kern G_i, also gilt $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ und

$$G_{i+1}/G_i \cong H_{i+1}/H_i$$

nach dem ersten Isomorphiesatz für alle $m \leqslant i < n$. Zusamenfassend haben wir Untergruppen $G_i \leqslant G$ gefunden, so dass

$$\{e_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

und die Quotienten G_{i+1}/G_i sind abelsch für alle $0 \leqslant i < n$. Somit ist G auflösbar.

(b) Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n. Falls $n = 0$, dann ist G isomorph zur trivialen Gruppe. Die triviale Gruppe ist auf jeden Fall auflösbar.

Sei $n > 0$, so dass die Auflösbarkeit aller Gruppen der Ordnung p^m für $m < n$ bereits bewiesen ist. Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n und seien $[x_1], \ldots, [x_k]$ die verschiedenen nicht-trivialen Konjugationsklassen in G. Dann gilt nach der Klassengleichung

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |[x_i]|.$$

Die Primzahl p teil die Ordnung der Konjugationsklassen $[x_i]$, weil diese nicht-trivial sind. Also folgt aus der Klassengleichung, dass p auch die Ordnung von $Z(G)$ teilt. Somit ist $Z(G)$ eine nicht-triviale, normale Untergruppe der Ordnung p^m für $m > 0$. Die Faktorengruppe $G/Z(G)$ ist nach der Induktionsannahme auflösbar, weil diese hat Ordnung $|G/Z(G)| = p^{n-m}$. Also muss nach Teilaufgabe (a) die Gruppe G auflösbar sein.

34. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $m, n \geqslant 1$ gilt:

$$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \colon n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \mathrm{ggT}(m, n)$$

Lösung: Seien $m, n \geqslant 1$ natürliche Zahlen. Dann ist $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \leqslant \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Untergruppe einer zyklischen Gruppe und somit zyklisch. Mit Aufgabe 6.(a) sehen wir, dass die maximale Ordnung eines Elements dieser Gruppe gleich $\frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}$ ist. Somit gilt $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}\mathbb{Z}$ und daher

$$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \frac{m}{\frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}} = \mathrm{ggT}(m, n).$$

35. Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Lösung: Sei $\varphi \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus. Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(1) = k + n\mathbb{Z}$. Dann gilt jetzt für jedes $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Gleichung $\varphi(g) = kg$. Umgekehrt ist auch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\varphi \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $g \mapsto kg$ ein wohldefinierter Homomorphismus: Sei nämlich $g + n\mathbb{Z} = g' + n\mathbb{Z}$, das heisst $g - g' \in n\mathbb{Z}$. Dann ist auch $kg - kg' = k(g - g') \in n\mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ endlich ist, ist dieser Homomorphismus genau dann bijektiv, wenn er surjektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\langle\varphi(1)\rangle = \langle k + n\mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt, also genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$ gilt. Deshalb ist $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ) \cong (\{k + n\mathbb{Z} : \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}, \cdot)$.

Bemerkung: Später werden wir sehen, dass das genau die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.