Musterlösung Serie 6

ENDLICH ERZEUGTE ABELSCHE GRUPPEN

---

36. (a) Zeige, dass $\langle(1,1)\rangle \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht Produktform hat. Das heisst, es existieren keine Untergruppen $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$ mit $\langle(1,1)\rangle = H_1 \times H_2$.

(b) Zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ trivial oder unendlich zyklisch ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

(c) Sei $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Zeige, dass der Index $[G : G^2]$ unendlich ist.

Lösung: (a) Seien $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$. Falls $H_1 = \{0\}$ ist, gilt $H_1 \times H_2 \leqslant \mathbb{Z} \times \{0\}$, also insbesondere auch $(1,1) \notin H_1 \times H_2$. Deshalb wissen wir $H_1 \neq \{0\} \neq H_2$. Nach Aufgabe 13 ist jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ unendlich zyklisch. Daher sind $H_1, H_2 \cong \mathbb{Z}$. Dann ist aber $H_1 \times H_2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht zyklisch und kann daher nicht gleich $\langle(1,1)\rangle$ sein.

(b) Seien $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{ggT}(p_i, q_i) = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$ beliebig. Wegen

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i \cdot \mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)}{q_i} \cdot \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)}$$

und

$$\frac{p_i \cdot \mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)}{q_i} \in \mathbb{Z}$$

liegt

$$\frac{p_i}{q_i} \in \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)} \right\rangle.$$

Da i beliebig war, impliziert das, dass

$$\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \in \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)} \right\rangle$$

liegt. Also gilt auch

$$\left\langle \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \ldots, q_n)} \right\rangle.$$

Somit ist $\langle \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ eine Untergruppe einer unendlich zyklischen Gruppe und nach Aufgabe 13 ebenfalls unendlich zyklisch.

Wenn $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt wäre, dann wäre $\mathbb{Q}$ also zyklisch. Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ gilt jedoch $\langle \frac{p}{q} \rangle = \{\frac{np}{q} : n \in \mathbb{Z}\}$. Insbesondere gilt für jede Primzahl $r > q$, dass $\frac{1}{r} \notin \langle \frac{p}{q} \rangle$ ist. Also ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

(c) Seien p und q verschiedene Primzahlen in $\mathbb{N} \subset G$. Dann liegt $q^{-1}p = \frac{p}{q}$ nicht in G^2. Das bedeutet nach Aufabe 15, dass $pG^2 \neq qG^2$ ist. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, muss G/G^2 unendlich viele Elemente haben. Also ist der Index $[G : G^2]$ unendlich.

37. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(a) Beweise folgende Variante von Korollar 5.5 bzw des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen:

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existieren natürliche Zahlen n, k und paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_n$, sodass für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ eine positive natürliche Zahl j_i und positive natürliche Zahlen $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ij_i}$ existieren, sodass gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^k .$$

Bemerkung: Der Hauptsatz bzw. Korollar 5.5 darf im Beweis verwendet werden.

(b) Zeige: Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(c) Zeige: Die Zerlegung in Korollar 5.5 ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(d) Bestimme, bis auf Isomorphie, alle abelschen Gruppen der Ordnung 72.

Lösung: (a) Laut Vorlesung existieren natürliche Zahlen k und $n_1 | \dots | n_s$ mit

$$G \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_s} \times \mathbb{Z}^k.$$

Für jedes $1 \leqslant i \leqslant s$ können wir n_i als $n_i = \prod_{j=1}^{k_{n_i}} p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}$ in Primfaktoren zerlegen und es gilt mit Aufgabe 8, dass $C_{n_i} \cong \prod_{j=1}^{k_{n_i}} C_{p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}}$ ist. Also gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n_s} \prod_{j=1}^{k_{n_i}} C_{p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}} \right) \times \mathbb{Z}^k.$$

Durch Umsortierung der Faktoren folgt die Behauptung.

(b) Seien

$$\varphi \colon G \to \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^k$$

und

$$\psi \colon G \to \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{\iota=1}^{k_i} C_{q_i^{\beta_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^l.$$

zwei Isomorphismen.

Wir zeigen zuerst $k = l$. Betrachte die Projektionen

$$\pi_1 \colon \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$$

$$\pi_2 \colon \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{\iota=1}^{k_i} C_{q_i^{\beta_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}^l.$$

Nach Aufgabe 7(b) ist die Menge E aller Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe von G. Da ein Isomorphismus die Ordnung aller Elemente erhält, ist $E = \ker(\pi_1 \circ \varphi) =$

$\ker(\pi_2 \circ \psi)$. Mit dem ersten Isomorphiesatz folgt $G/E \cong \mathbb{Z}^k$ und $G/E \cong \mathbb{Z}^l$. Das impliziert $\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{Z}^l$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k \leqslant l$ und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^l$ ein Gruppenisomorphismus. Der $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^l$, der von $\varphi(\mathbb{Z}^k)$ erzeugt wird, kann höchstens k-dimensional sein, da er von den Bildern der k Erzeugern von $\mathbb{Z}^k$ erzeugt wird. Der von $\mathbb{Z}^l$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^l$ hat allerdings Dimension l. Da φ surjektiv ist, müssen diese beiden Untervektorräume gleich sein. Daher gilt $k = l$.

Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist wegen Aufgabe 7(b) die Untergruppe $\varphi^{-1}\left(\prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}}\right)$ die Menge aller Elemente in G, deren Ordnung eine Potenz von p_i ist. Da ein Isomorphismus die Ordnung der Elemente erhält, muss es für jedes $p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ ein $q_{i'} \in \{q_1, \ldots, q_n\}$ geben mit $p_i = q_{i'}$, sodass

$$\psi \circ \varphi^{-1}\left(\prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}}\right) = \prod_{\iota=1}^{k_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'\iota}}}$$

gilt, und umgekehrt muss es auch für jedes $q_{i'}$ ein solches p_i geben. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die $\alpha_{i\iota}$ und $\beta_{i'\iota}$ absteigend der Grösse nach geordnet und sei $\alpha_{i1} = \cdots = \alpha_{i\iota_i}$ und $\beta_{i'1} = \cdots = \beta_{i'\kappa_{i'}}$. Dann ist $\prod_{\iota=1}^{\iota_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}}$ von den Elementen maximaler Ordnung erzeugt, ebenso $\prod_{\iota=1}^{\kappa_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'\iota}}}$. Daher müssen diese Gruppen gleich sein. Es folgt $\iota_i = \kappa_{i'}$ und $\alpha_{i1} = \beta_{i'1}$. Wie oben gibt es mit dem ersten Isomorphiesatz einen Isomorphismus

$$\prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \Big/ \prod_{\iota=1}^{\iota_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \cong \prod_{\iota=1}^{k_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'\iota}}} \Big/ \prod_{\iota=1}^{\kappa_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'\iota}}},$$

also einen Isomorphismus

$$\prod_{\iota=\iota_i+1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \cong \prod_{\iota=\kappa_{i'}+1}^{k_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'\iota}}}.$$

Das Argument können wir für diese Gruppen wiederholen und die Behauptung ergibt sich induktiv.

(c) Das Argument funktioniert ähnlich wie in (b). Wir können genau gleich schliessen, dass k eindeutig ist. Als nächtes betrachten wir die Untergruppe, die von den Elementen maximaler Ordnung erzeugt wird. Wir schliessen wie oben, dass sie gleich sein müssen und betrachten die Faktorgruppen. Von diesen nehmen wir wieder Elemente maximaler Ordnung, und so weiter.

(d) Wir zerlegen $72 = 2^3 \times 3^2$. Daher sind alle möglichen abelschen Gruppen dieser Ordnung bis auf Isomorphie

$$\begin{aligned}
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 &\cong C_2 \times C_6 \times C_6 \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 &\cong C_2 \times C_2 \times C_{18} \\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 &\cong C_6 \times C_{12} \\
C_4 \times C_2 \times C_9 &\cong C_2 \times C_{36} \\
C_8 \times C_3 \times C_3 &\cong C_3 \times C_{24} \\
C_8 \times C_9 &\cong C_{72}.
\end{aligned}$$