Musterlösung Serie 7

SYLOWSÄTZE, PERMUTATIONSGRUPPEN

---

38. *Satz von Cauchy.* Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl, die die Gruppenordnung von G teilt. Dann existiert ein $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.

Hinweis: Verwende Faktum 3.3 aus der Vorlesung.

Lösung: Wir führen Induktion über die Gruppenordnung $|G|$. Ist $|G| = 1$, so gilt die Aussage. Wir nehmen nun an, dass $|G| > 1$ ist und dass der Satz bewiesen ist für alle Gruppen H mit $|H| < |G|$. Falls eine Untergruppe $H < G$ existiert, deren Ordnung von p geteilt wird, so besitzt H nach Induktionsvoraussetzung ein Element a mit $\operatorname{ord}(a) = p$. Weil $a \in G$ liegt, sind wir dann fertig. Wir nehmen nun an, dass für jede echte Untegruppe $H < G$ die Primzahl p kein Teiler von $|H|$ ist. Weil p die Gruppenordnung von G teilt, muss also p den Index $[G : H]$ teilen. Insbesondere teilt p den Index $[G : Z_G(a)]$ für alle $a \in G$ mit $|[a]| > 1$, wobei $[a] = \{xax^{-1} \mid x \in G\}$ und $Z_G(a)$ der Zentralisator von a in G ist. Mit Faktum 3.3 aus der Vorlesung folgt, dass p die Ordnung des Zentrums $Z(G)$ teilt. Das heisst, $Z(G)$ kann keine echte Untergruppe von G sein, also $Z(G) = G$ und daher ist G abelsch. Mit Korollar 5.5 ist dann $G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_s}$ mit $n_i | n_{i+1}$ und $p | n_s$, also existiert ein $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.

39. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 oder 56 nie einfach ist.

Lösung: Sei G eine Gruppe der Ordnung $40 = 2^3 \cdot 5$. Nach den Sylowsätzen gilt $|\mathrm{Syl}_5(G)| \mid 8$ und $|\mathrm{Syl}_5(G)| \equiv 1 \mod 5$. Das impliziert $|\mathrm{Syl}_5(G)| = 1$. Da Konjugation mit einem Element aus G jede Untergruppe von G auf eine Gruppe derselben Ordnung schickt und es nur eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt ist diese invariant unter Konjugation, also normal. Somit haben wir einen nichttrivialen Normalteiler von G gefunden und G ist nicht einfach.

Sei G eine Gruppe der Ordnung $56 = 2^3 \cdot 7$. Nach den Sylowsätzen gilt $|\mathrm{Syl}_7(G)| \mid 8$ und $|\mathrm{Syl}_7(G)| \equiv 1 \mod 7$. Somit gibt es entweder genau eine oder genau acht Sylow 7-Untergruppen. Falls es genau eine gibt, ist diese wie oben ein Normalteiler. Nimm an, es gibt acht Sylow 7-Untergruppen. Diese sind alle zyklisch und von jedem ihrer nichttrivialen Elemente erzeugt. Daher haben je zwei Sylow 7-Untergruppen trivialen Schnitt. Somit hat die Vereinigung aller Sylow 7-Untergruppen genau $(7 - 1) \cdot 8 + 1 = 49$ Elemente. Die Anzahl aller Sylow 2-Untergruppen ist ungerade und teilt 7, ist also 1 oder 7. Wenn sie 7 ist, haben diese insgesamt mindestens 8 Elemente der Ordnung $2, 4$ oder 8. Ausserdem müssen Sylowuntergruppen zu verschiedenen Primzahlen wegen des Satzes von Lagrange immer trivialen Schnitt haben. Somit haben wir $56 = |G| \geqslant 49 + 8 = 57$. Das ist ein Widerspruch, also hat G genau eine Sylow 7-Untergruppe oder genau eine Sylow 2-Untergruppe und diese ist wie oben normal.

40. (a) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Tetraedergruppe.

(b) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Würfelgruppe.

(c) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Dodekaedergruppe.

Lösung: (a) In Aufgabe 20 haben wir die Kardinalität und alle Untergruppen der Tetraedergruppe bestimmt. Es gilt $T = 2^2 \cdot 3$. Es gibt genau eine Sylow 2-Untergruppen und genau vier Sylow 3-Untergruppen.

(b) Eine Würfeldrehung ist durch das Bild einer Ecke und eines ihrer Nachbarn eindeutig bestimmt. Damit gilt $|W| = 8 \cdot 3 = 24$. Die Menge aller Drehungen an einer bestimmten Würfeldiagonalen d sind offensichtlich eine Untergruppe der Ordnung 3. Daher ist das eine Sylow 3-Untergruppe H. Sei $g \in W$. Dann ist gHg^{-1} die Menge aller Drehungen an der Würfeldiagonalen $g[d]$. Da es genau vier Würfeldiagonalen gibt, gibt es somit auch genau vier Sylow 3-Untergruppen.

Sei Q das Quadrat parallel zur Grundfläche durch den Mittelpunkt des Würfels. Die Menge aller Würfeldrehungen, die Q in sich selbst überführen, ist offensichtlich eine Untergruppe der Ordnung 8. Daher ist das eine Sylow 2-Untergruppe K. Sei $g \in W$. Dann ist gKg^{-1} die Menge aller Drehungen am Quadrat $g[Q]$. Da es genau drei Quadrate parallel zu Seitenflächen durch den Mittelpunkt gibt, gibt es somit auch genau drei Sylow 2-Untergruppen.

(c) Sei ι die Identität.

Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{15}$ die 15 Drehungen um π um die 15 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten.

Seien $\tau_1, \ldots, \tau_{10}$ die 10 Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ (mit jeweils einem festgelegten Drehsinn) um die 10 Achsen durch gegenüberliegende Ecken.

Seien $\rho_1, \ldots, \rho_6$ die 6 Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$ (mit jeweils einem festgelegten Drehsinn) um die 6 Achsen durch Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen.

Dann sind ι, σ_h $(1 \leqslant h \leqslant 15)$, τ_i^k $(1 \leqslant i \leqslant 10, 1 \leqslant k \leqslant 2)$, ρ_j^l $(1 \leqslant j \leqslant 6, 1 \leqslant l \leqslant 4)$ die 60 Elemente der Dodekaedergruppe D (mit Verknüpfung als Gruppenoperation).

Da 5 eine Primzahl ist sind alle Sylow 5-Untergruppen von D zyklisch. Daher gilt $\mathrm{Syl}_5(D) = \{\langle \rho_j \rangle : 1 \leqslant j \leqslant 6\}$, *d.h.* D besitzt 6 Sylow 5-Untergruppen; es gilt $6 \equiv 1 \mod 5$ und $6 \mid 12$.

Da 3 eine Primzahl ist sind alle Sylow 3-Untergruppen von D zyklisch. Daher gilt $\mathrm{Syl}_3(D) = \{\langle \tau_i \rangle : 1 \leqslant i \leqslant 10\}$, *d.h.* D besitzt 10 Sylow 3-Untergruppen; es gilt $10 \equiv 1 \mod 3$ und $10 \mid 20$.

Die Sylow 2-Untergruppen von D sind genau die Untergruppen der Ordnung 4. Die 15 Drehachsen, welche durch Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen, können in fünf Tripel zu jeweils 3 Achsen aufgeteilt werden, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Sind nun $\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}$ die Drehungen um π um drei zueinander senkrecht stehender Achsen, so ist die Gruppe $\{\iota, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}\} \cong C_2 \times C_2$ eine Sylow 2-Untergruppe von D. Wie oben können wir sehen, dass jedes $g \in D$ ein solches Tripel auf ein anderes solches Tripel schickt und $g\{\iota, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}\}g^{-1}$ die Untergruppe von D ist, die aus Drehungen an den Bildern unter g des Diagonalentripels besteht. Davon gibt es, wie bereits erwähnt, genau fünf und deshalb gibt es genau fünf Sylow 2-Untergruppen. Es gilt $5 \equiv 1 \mod 2$ und $5 \mid 15$.

41. *Satz von Cayley.* Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Lösung: Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Wir betrachten die Gruppenoperation durch Linkstranslation von G auf sich selber:

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, a) &\mapsto \tau_g(a) := ga. \end{aligned}$$

Für jedes $g \in G$ ist τ_g eine Bijektion der Menge G auf sich selber. Dies induziert also einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tau \colon G &\to S(G) \cong S_n \\ g &\mapsto \tau_g. \end{aligned}$$

Dieser Homomorphismus ist injektiv: für $g \in G$ mit $\tau_g = \mathrm{id}_G$ gilt für alle $a \in G$ auch $ga = a$, also muss $g = 1$ sein. Als injektiver Homomorphismus induziert τ einen Isomorphismus von G auf das Bild von τ, was eine Untergruppe von $S(G) \cong S_n$ ist. Es folgt die zu Beweisende Aussage.

42. (a) Zeige: Sind $\rho, \sigma \in S_n$ disjunkte Permutationen, dann gilt $(\rho\sigma)^k = \sigma^k\rho^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Ist ρ ein k-Zykel in S_n, dann ist $\mathrm{ord}(\rho) = k$.

(c) Zeige: Ist $\pi \in S_n$ ein Produkt paarweise disjunkter Zyklen der Länge $k_1, \ldots, k_r$, so ist $\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst, dass $\rho\sigma = \sigma\rho$ gilt. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Falls $\rho(i) \neq i$ ist, so folgt $\sigma(i) = i$, weil die Zykel disjunkt sind. Also ist $\rho\sigma(i) = \rho(i)$. Weil $\rho(i) \neq i$ ist, muss auch $\rho(\rho(i)) \neq \rho(i)$ sein, also folgt wiederum $\sigma(\rho(i)) = \rho(i)$. Wir sehen also, dass $\rho\sigma(i) = \rho(i) = \sigma\rho(i)$ gilt. Es folgt direkt, dass $(\rho\sigma)^k = \sigma^k\rho^k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei ρ ein k-Zykel $(a_1, \ldots, a_k)$. Dann sind alle a_i paarweise verschieden und es gilt $\rho^\ell(a_1) = a_{1+\ell}$ für alle $0 \leqslant \ell < k$. Somit ist $\rho^\ell \neq 1$ für $1 \leqslant \ell < k$. Es gilt aber $\rho^k(a_i) = a_i$ für alle i, also hat ρ Ordnung k.

(c) Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ die disjunkten Zykel. Sei ℓ die Ordnung von π. Mit (a) folgt

$$1 = (\sigma_1 \cdots \sigma_r)^\ell = \sigma_1^\ell \cdots \sigma_r^\ell.$$

Weil $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ paarweise disjunkt sind, sind auch $\sigma_1^\ell, \ldots, \sigma_r^\ell$ paarweise disjunkt. Aus der obigen Gleichung folgt dann $\sigma_i^\ell = 1$ für alle i. Also muss die Ordnung von σ_i, die wegen (b) gleich k_i ist, die Zahl ℓ teilen. Weil dies für alle i gilt, folgt $\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)|\ell$. Weil aber für $\ell = \mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$ die Gleichung

$$\pi^\ell = \sigma_1^\ell \cdots \sigma_r^\ell = 1$$

erfüllt ist, folgt dass $\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$ die Ordnung von π ist.

43. Ein 2-Zykel heisst *Transposition* und eine *elementare Transposition* ist eine Transposition der Form $(i, i+1)$. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) Jede Transposition kann als Produkt von elementaren Transpositionen geschrieben werden.

(b) Jeder Zykel kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.

(c) Jeder Zykel in S_n (für $n \geqslant 2$) kann als ein Produkt der beiden Zyklen $(1\,2)$ und $(1\,...\,n)$ geschrieben werden; insbesondere ist $S_n = \langle (1\,2),\ (1\,...\,n)\rangle$.

(d) Jeder Zykel in S_n (für $n \geqslant 2$) kann als ein Produkt von Transpositionen der Form $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ geschrieben werden; insbesondere ist $S_n = \langle (1\,2), \ldots, (1\,n)\rangle$.

Lösung: (a) Sei $(a\,b)$ eine Transposition. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a < b$. Dann gilt

$$(a\,b) = (a, a{+}1)\cdot(a{+}1, a{+}2)\cdots(b{-}2, b{-}1)(b{-}1, b)\cdot(b{-}2, b{-}1)\cdots(a{+}1, a{+}2)\cdot(a, a{+}1).$$

Also ist $(a\,b)$ ein Produkt von elementaren Transpositionen.

(b) Für jeden Zykel $(a_1, \ldots, a_k)$ ist

$$(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k) = (a_1\,a_2)(a_2\,a_3)\cdots(a_{k-2}\,a_{k-1})(a_{k-1}\,a_k).$$

(c) Sei $\sigma = (1\,2\,\ldots\,n)$ und $\tau = (1\,2)$. Beachte, dass gilt $\sigma^\ell = \iota$, d.h. $\sigma^{\ell-1} = \sigma^{-1}$. Für jede elementare Transposition $(i, i+1)$ gilt

$$(i, i+1) = \sigma^{i-1}\tau\sigma^{-(i-1)}.$$

Diese wird also von σ und τ erzeugt. Da jeder Zykel nach (b) als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann und jede Transposition nach (a) als Produkt von elementaren Transpositionen geschrieben werden kann, folgt die Aussage.

(d) Seien $1 \leqslant a, b \leqslant n$ zwei natürliche Zahlen. Dann gilt

$$(a\,b) = (1\,a)(1\,b)(1\,a).$$

Nach Aufgabe (a) wird S_n durch Transpositionen S_n erzeugt, also wird sie auch durch die Transpositionen $(1\,k)$ erzeugt.

44. Zeige, dass für die Tetraedergruppe T, für die Würfelgruppe C, und für die Dodekaedergruppe D gilt:

$$T \cong A_4 \qquad C \cong S_4 \qquad D \cong A_5$$

Lösung: Für T betrachte die 4 Flächen des Tetraeders, für C betrachte die 4 Raumdiagonalen des Würfels, und für D betrachte die 5 Würfel, die einem Dodekaeder um- bzw. einbeschrieben werden können.

Betrachte beispielsweise den Dodekaeder und eine beliebige Rotation die den Dodekaeder um die Rotationsaxe, die durch zwei gegenüberstehenden Ecken des Dodekaeders geht, dreht. Falls eine dieser Ecken (und somit auch die andere) einen der 5 Würfel gehört, so bildet die Rotation den entsprechenden Würfel in sich ab. Für jede solche Rotation gibt es genau 2 Würfel die diese fixiert. Die anderen 3 Würfel werden untereinander zyklisch permutiert, so dass diese Permuttaion durch einen 3-Zykel in S_5 dargestellt werden kann. Der Dodekaeder hat genau 20 verschiedene solche Rotationen (um $2\pi/3$ und $4\pi/3$ für 10 Rotationsaxen). Bemerke andererseits auch dass es genau 20 verschiedene 3-Zykel in S_5 gibt. Somit generieren die Rotationen des Dodekaeders alle 3-Zykel in S_5, und diese erzeugen A_5. Dies genügt um zu zeigen dass $D \cong A_5$, weil die Anzahl verschiedener Rotationen des Dodekaeders, zusammen mit der Identität, gleich 60 ist, was $|A_5| = \frac{5!}{2} = 60$ entspricht.