

MC-Aufgaben 12

56. Sei N eine positive natürliche Zahl mit:

$$N \equiv 4 \pmod{39} \quad N \equiv 4 \pmod{65} \quad N \equiv 17 \pmod{91}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (mehrere Antworten möglich)

- (a) N ist eindeutig modulo 13.
- (b) N ist eindeutig modulo 315.
- (c) Solch eine Zahl N existiert nicht.
- (d) Solch eine Zahl N existiert.

57. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (mehrere Antworten möglich)

- (a) Jedes Primideal ist ein maximales Ideal.
- (b) Der Durchschnitt von zwei verschiedenen maximalen Idealen ist immer das triviale Ideal.
- (c) In \mathbb{Z} ist jedes maximale Ideal nicht-trivial.
- (d) In \mathbb{Z} ist der Durchschnitt von verschiedenen maximalen Ideal nie ein Primideal.

58. Welche der folgenden Mengen sind Primideale? (mehrere Antworten möglich)

- (a) \mathbb{Q} in $\mathbb{Q}[X]$
- (b) $(\bar{5})$ in $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
- (c) $(\bar{3})$ in $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
- (d) (0) in \mathbb{C} .

59. Für R und S kommutative Ringe, sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (mehrere Antworten möglich)

- (a) $\ker(\varphi)$ ist ein Unterring in R .
- (b) $\text{bild}(\varphi)$ ist ein Unterring in S .
- (c) Ist \mathfrak{s} ein Ideal in S , dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{s})$ ein Ideal in R .
- (d) Falls φ surjektiv ist, dann ist für jedes Ideal \mathfrak{r} in R das Bild $\varphi(\mathfrak{r})$ ein Ideal.

60. Sei R ein kommutativer Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig? (mehrere Antworten möglich)

- (a) Die leere Menge ist ein Ideal in R .
- (b) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist $(p) \subset \mathbb{N}$ ein Primideal.
- (c) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ ist $(p) \subset \mathbb{Z}$ ein Primideal.
- (d) Wir nennen ein Element $x \in R$ *nilpotent*, falls $n \geq 1$ existiert mit $x^n = 0$. Für jedes nilpotente Element $x \in R$ und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ gilt $x \in \mathfrak{p}$.