

MC-Aufgaben 3

11. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (a) Seien G_1, G_2 Gruppen. Dann enthält jede Untergruppe von $G_1 \times G_2$ eine Untergruppe der Form $H_1 \times H_2$ für bestimmte Untergruppen $H_1 \leq G_1$ und $H_2 \leq G_2$.
- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \mid |D_{20}|$ existiert eine normale Untergruppe $H \leq D_{20}$ mit $|H| = n$.
- (c) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 85$. Für Elemente $a, b \in G \setminus \{e\}$ mit $\text{ord}(a) \neq \text{ord}(b)$ gilt $\langle a, b \rangle = G$.

12. Sei $H < G$ eine Untergruppe einer Gruppe G . Definiere den Zentralisator als

$$Z_G(H) = \{x \in G : \forall h \in H (hx = xh)\}.$$

Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- (a) $H \subset Z_G(Z_G(H))$
- (b) Für H abelsch gilt $H \subset Z_G(H)$.
- (c) $Z(H) \subset Z_G(H)$
- (d) $Z_G(H) \subset Z(G)$

13. Sei (G, e) eine Gruppe und seien $K, H \trianglelefteq G$, so dass die Ordnungen von H und K zwei verschiedene Primzahlen sind.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) Für alle $h \in H$ und $k \in K$ gilt $hkh^{-1}k^{-1} = e$.
- (b) Für alle $h \in H$ und $k \in K$ gilt $hk = kh$.
- (c) Es gilt $HK = G$.

14. Sei C die Würfelgruppe, d.h. die Symmetriegruppe des Würfels. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) C hat keine Untergruppe mit Index 6.
- (b) C hat einen Normalteiler $N \trianglelefteq C$ mit $N \cong C_8$.
- (c) C hat keine Untergruppe mit Index 4.
- (d) Es existiert eine Untergruppe $H \leq C$ mit $\text{ord}(H) = 6$.

15. Sei T die Tetraedergruppe, d.h. die Symmetriegruppe des Tetraeders. Welche der folgenden Aussagen ist/sind falsch? (mehrere Antworten möglich)

- (a) T hat einen Normalteiler $N \trianglelefteq T$ mit $N \cong C_2 \times C_2$.
- (b) Jede Untergruppe $H \leq T$ mit $H \cong C_2 \times C_2$ ist ein Normalteiler.
- (c) Es existiert eine Untergruppe $H \leq T$ mit $H \cong C_2 \times C_4$.
- (d) Es existiert eine Untergruppe $H \leq T$ mit $H \cong D_3$.