

MC-Aufgaben 4

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, bezeichnet $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$ die Menge der $n \times n$ Matrizen über \mathbb{Q} und $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen über \mathbb{Q} . Weiter bezeichnet \mathbb{Z} die additive Gruppe der ganzen Zahlen.

Für eine additive abelsche Gruppe $(G, +)$ und eine positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei die Untergruppe $nG \leq G$ definiert durch

$$nG := \left\{ \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} : a \in G \right\}.$$

16. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) $[\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : 6(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})] = 2$
- (b) $\mathbb{Z}/\langle 199, 227 \rangle \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$
- (c) Für $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist $[G : 2G] = 6$
- (d) $\mathbb{Z}/(85\mathbb{Z} \cap 34\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/170\mathbb{Z}$

17. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) D_n ist auflösbar für alle $n \geq 2$.
- (b) Die Würfelgruppe ist auflösbar.
- (c) Zyklische Gruppen sind nicht immer auflösbar.
- (d) S_3 ist auflösbar.

18. Bezüglich der Gruppenoperation

$$\text{GL}_2(\mathbb{Q}) \times \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}), \quad (B, M) \mapsto BM$$

ist der Stabilisator der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ gegeben durch:

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2a & b-a \\ 2c & 2b-c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \cap \text{GL}_2(\mathbb{Q})$
- (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{Q} \right\} \cap \text{GL}_2(\mathbb{Q})$
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 2b-2a \\ c & b-2c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \cap \text{GL}_2(\mathbb{Q})$

19. Sei G eine Gruppe der Ordnung 85 und M eine Menge mit 20 Elementen. Dann ist die Aussage: *Jede Operation von G auf M hat mindestens einen Fixpunkt.*
- (a) Wahr.
 - (b) Falsch.
20. Welche der folgenden Abbildungen $GL_n(\mathbb{Q}) \times \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$ ist für jede positive natürliche Zahl n eine Gruppenoperation der Gruppe $GL_n(\mathbb{Q})$ auf $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$?
- (a) $(A, M) \mapsto AMA$
 - (b) $(A, M) \mapsto A^T M A$
 - (c) $(A, M) \mapsto A + M$
 - (d) $(A, M) \mapsto M A^T$