

Serie 1

ZYKLISCHE GRUPPEN, UNTERGRUPPEN, ORDNUNG EINES ELEMENTS

6. (a) Sei G eine Gruppe und sei g ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass für jede ganze Zahl k gilt

$$\text{ord}(g^k) = \frac{\text{kgV}(k, \text{ord}(g))}{k}.$$

- (b) Sei G eine Gruppe und seien $g, h \in G$ zwei kommutierende Elemente endlicher teilerfremder Ordnung. Zeige: $\text{ord}(gh) = \text{ord}(g) \cdot \text{ord}(h)$.
(c) Zeige, dass die Aussage aus (b) für nicht kommutierende Elemente im Allgemeinen nicht stimmt.

7. Sei G eine endliche Gruppe mit Neutralelement e und sei $x \in G$.

- (a) Zeige, dass gilt $\text{ord}(x) \mid \text{ord}(G)$.
(b) Zeige, dass gilt $x^{\text{ord}(G)} = e$.

8. Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.

Zeige: Es gilt genau dann $C_m \times C_n \cong C_{n \cdot m}$, wenn $\text{ggT}(m, n) = 1$ ist.

9. Zeige, dass C_4 und $C_2 \times C_2$ bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 4 sind.

10. Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige:

- (a) Jede Untergruppe von G ist zyklisch.
(b) Falls G eine endliche Gruppe der Ordnung $m \geq 1$ ist, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{H : H \leq G\} &\rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k \mid m\} \\ H &\mapsto |H| \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

11. (a) Sei p eine Primzahl.

Zeige: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p , nämlich C_p .

- (b) Sei G eine Gruppe mit genau einer nichttrivialen echten Untergruppe.

Zeige: Dann gilt $G \cong C_{p^2}$ für eine Primzahl p .

12. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$.
Zeige, $(H_1 \cup H_2) \leq G \iff H_1 \leq H_2 \vee H_2 \leq H_1$.

13. Zeige, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $n\mathbb{Z}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.