Serie 10

IDEALE, ENDLICHE KÖRPER, 2. ISOMORPHIESATZ

---

53. Sei R ein Ring und sei $\mathrm{Mat}(n, R)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in R mit der üblichen Addition und Multiplikation.

(a) Zeige: Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist $\mathrm{Mat}(n, \mathfrak{a})$ ein Ideal in $\mathrm{Mat}(n, R)$.

(b) Zeige: Jedes Ideal in $\mathrm{Mat}(n, R)$ ist von der Form $\mathrm{Mat}(n, \mathfrak{a})$ für ein geeignetes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.

(c) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in R.
Zeige:

$$\mathrm{Mat}(n, R/\mathfrak{a}) \;\cong\; \mathrm{Mat}(n, R)/\,\mathrm{Mat}(n, \mathfrak{a})\,.$$

54. Zeige: Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Köper, so ist die multiplikative Einheitengruppe $\mathbb{F}^*$ zyklisch.

Hinweis: Verwende den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen und betrachte die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ (für ein geeignetes n).

55. Zeige: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn m prim ist.

56. (a) Zeige: Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein Ideal, dann ist $\varphi^{-1}[\mathfrak{a}]$ ein Ideal in R.

(b) Zeige: Ist $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, dann ist $\varphi[\mathfrak{a}]$ ein Ideal in S.

57. *2. Isomorphiesatz*: Seien R, S Ringe und $\varphi\colon R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{a}$, und sei ψ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & R/\mathfrak{a} & \to & S/\varphi[\mathfrak{a}] \\ & r + \mathfrak{a} & \mapsto & \varphi(r) + \varphi[\mathfrak{a}] \end{array}$$

(a) Zeige, dass ψ wohldefiniert ist.

(b) Zeige, dass ψ ein Ringhomomorphismus ist.

(c) Zeige, dass ψ surjektiv und injektiv ist.