

Serie 11

PRIMIDEALE, QUOTIENTENKÖRPER

58. Zeige:

- (a) Ist R nullteilerfrei, so ist $\text{char}(R) = 0$ oder $\text{char}(R)$ ist eine Primzahl.
- (b) Ist $\text{char}(R) = n > 0$, so gilt $n \cdot a = 0$ fuer alle $a \in R$.

59. Zeige:

- (a) Jedes maximale Ideal ist Primideal.
- (b) Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.
- (c) Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und ist R/\mathfrak{p} endlich, dann ist \mathfrak{p} ein maximales Ideal.

60. Gegeben sei der Ring $R = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, +, *)$ mit $+$ und $*$ wie in Aufgabe 50 und sei

$$\mathfrak{a} = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ ist endlich}\} \subseteq R.$$

Weiter sei

$$S = \left\{ \bigcup_{n \in Y} \{2n, 2n + 1\} : Y \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

ein Unterring von R .

- (a) Zeige, dass \mathfrak{a} ein Ideal in R ist.
- (b) Zeige, dass \mathfrak{a} kein Primideal ist.
- (c) Finde mit dem 1. Isomorphiesatz einen von $(S + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ verschiedenen, aber zu $(S + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ isomorphen, Ring und bestimme den entsprechenden Isomorphismus.
- (d) Finde einen surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ mit $\ker(\varphi) = \mathcal{P}(4\mathbb{N})$.
- (e) Sei φ der surjektive Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ aus Aufgabe (d) und sei $\mathfrak{b} := \mathcal{P}(2\mathbb{N})$.
Bestimme den Isomorphismus zwischen R/\mathfrak{b} und $S/\varphi[\mathfrak{b}]$.
- (f) Finde zwei Primideale in R .
- (g) Wo liegt die Schwierigkeit, das Ideal \mathfrak{a} zu einem Primideal zu erweitern?

61. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.

Bestimme den Quotientenkörper $\text{Quot}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, wobei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + \sqrt{d} \cdot b : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Das sogenannte Teichmüllerprinzip ist eine Aussage, welche äquivalent zum Auswahlaxiom ist, und welche sich besonders für Anwendungen in der Algebra eignet. Für die Formulierung des Teichmüllerprinzips müssen wir folgenden Begriff einführen:

Eine Menge M hat **endlichen Charakter**, wenn gilt:

$$X \text{ ist in } M \iff \text{jede endliche Teilmenge von } X \text{ ist in } M.$$

TEICHMÜLLERPRINZIP: Ist M eine Menge mit endlichem Charakter, so hat M bezüglich der Inklusion \subseteq ein maximales Element.

62. Sei R ein Ring.

- (a) Zeige, dass die Menge $M := \{S \subseteq R : 1_R \notin (S)\}$ endlichen Charakter hat.
- (b) Zeige, dass R ein maximales Ideal besitzt.
- (c) Zeige, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ mit $\mathfrak{a} \neq R$ zu einem maximalen Ideal erweitert werden kann.