Algebra I

HS 2024

Serie 2

UNTERGRUPPEN, NEBENKLASSEN, NORMALTEILER

---

14. Seien $m = 12$ und $n = 21$ und sei g ein Erzeuger der zyklischen Gruppe C_{mn}. Weiter sei $x := g^{120}$.

(a) Zeige: $\operatorname{ord}(x) = n$.

(b) Finde mehrere Elemente $y, z \in C_{mn}$ mit

$$C_{mn} \neq \langle z \rangle, \quad C_{mn} = \langle y \rangle \quad \text{und} \quad z^m = y^m = x\,.$$

15. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Definiere folgende Relation auf G:

$$g \sim \tilde{g} \Leftrightarrow \tilde{g}^{-1}g \in H.$$

(a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeige, dass die Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen von H sind.

(c) Nimm an, die Vorschrift $[g]\circ[\tilde{g}] := [g\tilde{g}]$ definiere eine wohldefinierte binäre Operation auf G/H. Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist. (*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde die Umkehrung dieser Aussage gezeigt.)

16. Sei G eine Gruppe, $a \in G$ und $Z_G(a)$ der Zentralisator von a in G. Zeige:

(a) Es gilt $\langle a \rangle \leqslant Z_G(a)$.

(b) Für jede Untergruppe $H \leqslant G$ gilt $Z_H(a) = Z_G(a) \cap H$.

17. Sei G eine Gruppe und seien U, V nichtleere Teilmengen von G. Wir definieren

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$
$$U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}.$$

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. U ist eine Untergruppe von G.

ii. $UU \subseteq U$ und $U^{-1} \subseteq U$.

iii. $UU^{-1} \subseteq U$.

(b) Falls U und V Untergruppen von G sind, dann ist UV genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

(c) Ist U endlich, dann ist U bereits dann eine Untergruppe, wenn $UU \subseteq U$ gilt.

18. Sei $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{U}$ ein Normalteiler von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist.

(b) Beschreibe die Menge $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$.

19. Finde alle Untergruppen von D_4 sowie alle Inklusionen zwischen diesen. Gib an, in welchen Fällen es sich um einen Normalteiler handelt.

20. Sei T die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

(a) Bestimme $|T|$.

(b) Zeige, dass T nicht abelsch ist.

(c) Bestimme alle Untergruppen von T.

(d) Welche Untergruppen von T sind nichttriviale Normalteiler?