Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Serie 5

CAYLEY-GRAPHEN, ISOMORPHIESÄTZE, AUFLÖSBARE GRUPPEN

---

30. Stelle den Cayley-Graph von D_4 dar bezüglich der zwei Erzeuger σ und ρ, wobei σ Ordnung 2 und ρ Ordnung 4 besitzt und es gilt $\sigma\rho\sigma = \rho^3$.

31. Betrachte einen Würfel mit den vier Raumdiagonalen x_1, x_2, x_3, x_4. Stelle den Cayley-Graph seiner Symmetriegruppe S_4 dar bezüglich den zwei Erzeugern ρ und σ, wobei ρ die $120°$-Drehung um die Achse x_1 ist und σ die $180°$-Drehung ist, die x_1 und x_2 vertauscht und x_3 und x_4 je auf sich abbildet.

32. *Dritter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe und seien N, M Normalteiler von G mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$

33. Sei G eine Gruppe.

(a) Zeige: Falls $N \trianglelefteq G$ existiert, so dass N und G/N auflösbar sind, dann ist G auflösbar.

(b) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = p^n$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Beweise mit Induktion über n, dass die Gruppe G auflösbar ist.

34. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $m, n \geqslant 1$ gilt:

$$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \colon n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \mathrm{ggT}(m, n)$$

35. Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.