D-MATH
Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Algebra I

HS 2024

Serie 6

ENDLICH ERZEUGTE ABELSCHE GRUPPEN

---

36. (a) Zeige, dass $\langle(1,1)\rangle \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht Produktform hat. Das heisst, es existieren keine Untergruppen $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$ mit $\langle(1,1)\rangle = H_1 \times H_2$.

(b) Zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ trivial oder unendlich zyklisch ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

(c) Sei $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Zeige, dass der Index $[G : G^2]$ unendlich ist.

37. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(a) Beweise folgende Variante von Korollar 5.5 bzw des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen:

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existieren natürliche Zahlen n, k und paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, sodass für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ eine positive natürliche Zahl j_i und positive natürliche Zahlen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ij_i}$ existieren, sodass gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^k \,.$$

Bemerkung: Der Hauptsatz bzw. Korollar 5.5 darf im Beweis verwendet werden.

(b) Zeige: Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(c) Zeige: Die Zerlegung in Korollar 5.5 ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(d) Bestimme, bis auf Isomorphie, alle abelschen Gruppen der Ordnung 72.