Serie 7

SYLOWSÄTZE, PERMUTATIONSGRUPPEN

---

38. *Satz von Cauchy.* Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl, die die Gruppenordnung von G teilt. Dann existiert ein $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.

Hinweis: Verwende Faktum 3.3 aus der Vorlesung.

39. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 oder 56 nie einfach ist.

40. (a) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Tetraedergruppe.

(b) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Würfelgruppe.

(c) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Dodekaedergruppe.

41. *Satz von Cayley.* Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

42. (a) Zeige: Sind $\rho, \sigma \in S_n$ disjunkte Permutationen, dann gilt $(\rho\sigma)^k = \sigma^k \rho^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Ist ρ ein k-Zykel in S_n, dann ist $\operatorname{ord}(\rho) = k$.

(c) Zeige: Ist $\pi \in S_n$ ein Produkt paarweise disjunkter Zyklen der Länge $k_1, \ldots, k_r$, so ist $\operatorname{ord}(\pi) = \operatorname{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$.

43. Ein 2-Zykel heisst *Transposition* und eine *elementare Transposition* ist eine Transposition der Form $(i, i+1)$. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) Jede Transposition kann als Produkt von elementaren Transpositionen geschrieben werden.

(b) Jeder Zykel kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.

(c) Jeder Zykel in S_n (für $n \geqslant 2$) kann als ein Produkt der beiden Zyklen $(1\ 2)$ und $(1\ \ldots\ n)$ geschrieben werden; insbesondere ist $S_n = \langle (1\ 2),\ (1\ \ldots\ n) \rangle$.

(d) Jeder Zykel in S_n (für $n \geqslant 2$) kann als ein Produkt von Transpositionen der Form $(1\ 2),\ (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ geschrieben werden; insbesondere ist $S_n = \langle (1\ 2),\ \ldots, (1\ n) \rangle$.

44. Zeige, dass für die Tetraedergruppe T, für die Würfelgruppe C, und für die Dodekaedergruppe D gilt:

$$T \cong A_4 \qquad C \cong S_4 \qquad D \cong A_5$$