D-MATH | Algebra I | HS 2024

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

# Serie 8

PERMUTATIONSGRUPPEN, SEMI-DIREKTE PRODUKTE

---

**45**. In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass für alle $n$ mit $n \geqslant 3$ und $n \neq 6$ gilt: $\mathrm{Aut}(S_n) \cong S_n$.

Im Folgenden sei $n$ eine natürliche Zahl mit $n \geqslant 3$ und $n \neq 6$.

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_n)$.
Zeige: Für jede Transposition $(i\ j) \in S_n$ ist $\alpha(i\ j)$ eine Transposition.

*Hinweis*: Da $\mathrm{ord}\big(\alpha(i\ j)\big) = 2$, ist $\alpha(i\ j)$ ein Produkt von $r$ paarweise disjunkten Transpositionen, wobei $2 \leqslant 2r \leqslant n$, und ist $(l\ k) \in S_n$ eine Transposition, so ist auch $\alpha(l\ k)$ ein Produkt von $r$ paarweise disjunkten Transpositionen. Es genügt also $r = 1$ zu zeigen.

(b) Zeige, dass für jeden Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_n)$ ein $\vartheta \in S_n$ existiert, sodass für alle $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\alpha(\sigma) = \vartheta\sigma\vartheta^{-1}\,.$$

*Hinweis*: Da $S_n = \langle (1\ 2), \ldots, (1\ n) \rangle$ genügt es folgendes zu zeigen: Es existiert ein $\vartheta \in S_n$, sodass für alle Transpositionen $(1\ k) \in S_n$ gilt, $\alpha(1\ k) = (\vartheta(1)\ \vartheta(k))$.

(c) Zeige $\mathrm{Aut}(S_n) \cong S_n$.

**46**. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = 2p$.

Zeige, dass $G$ entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe $D_p$ ist.

**47**. Seien zwei Gruppen $N, H$ und zwei Homomorphismen $\varphi, \varphi'\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben. Es seien $N \rtimes_\varphi H$ und $N \rtimes_{\varphi'} H$ die semidirekten Produkte.

Zeige, dass diese beiden Gruppen in den folgenden Situationen isomorph sind:

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi' = \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi = \varphi' \circ \beta$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

**48**. Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung $28$.

*Hinweis*: Zeige mit dem Sylow-Theorem, dass eine Gruppe der Ordnung $28$ immer einen nicht-trivialen Normalteiler hat.