Serie 9

RINGE, EINHEITENGRUPPE

---

49. Sei $(G,+)$ eine additive abelsche Gruppe und sei $\mathrm{End}(G)$ die Menge der Endomorphismen von G.

Zeige, dass $\big(\mathrm{End}(G),+,\circ\big)$ mit

$$(f_1+f_2)(g) := f_1(g)+f_2(g) \quad \text{und} \quad (f_1\circ f_2)(g) := f_1\big(f_2(g)\big)$$

zu einem Ring wird.

50. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(S)$ (*d.h.* der Menge aller Teilmengen von S) definieren wir zwei binäre Operationen $+$ und $*$ wie folgt:

$$X * Y := X \cap Y\,, \qquad X+Y := (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)\,.$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S),\emptyset,S,+,*\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(S)$ eine nicht-leere Teilmenge von $\mathscr{P}(S)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Für $X,Y \in \mathfrak{a}$ ist auch $X \cup Y \in \mathfrak{a}$.

(ii) Ist $X \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathfrak{a}$.

Zeige, dass dann für alle $X,Y \in \mathfrak{a}$ und $Z \in \mathscr{P}(S)$ gilt:

$$X+Y \in \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad Z * X \in \mathfrak{a}\,.$$

51. Sei n eine positive natürliche Zahl. Definiere die **Eulersche φ-Funktion** durch

$$\varphi(n) := \big|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\big|\,.$$

(a) Zeige: Für jede ganze Zahl a, die teilerfremd ist zu n, gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \textit{d.h. } n \mid (a^{\varphi(n)}-1)\,.$$

(b) Zeige: Existiert eine Zerlegung $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$ mit paarweise teilerfremden positiven Zahlen q_i, so ist $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r \varphi(q_i)$.

(c) Zeige: Ist $n = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $l_i > 0$ (für alle i), so gilt

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^r \Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)\,.$$

52. Sei $R = \mathbb{Z}/201\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/102\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$.

(a) Bestimme die Ordnung $|R^*|$ der Einheitengruppe von R.

(b) Finde das multiplikativ Inverse von $(\overline{13},\overline{13},\overline{13})$ in R.