Theorem 7.11 A_n ist einfach für alle $n \geq 5$.

Beweis: Mit Induktion über $n \geq 5$. Lem. 7.10 beweist den Satz für $n=5$. Sei $n>5$ und sei A_{n-1} einfach. Wir betrachten die Gruppenoperation $A_n \curvearrowright [n]$.

- Für $i \in [n]$ sei $H_i := St_{A_n}(i) \cong A_{n-1}$. Für $\pi \in A_n$ mit $\pi(i)=j$ gilt für alle $\sigma \in H_i$, $\pi\sigma\pi^{-1}(j)=j$, d.h. $\pi H_i \pi^{-1} = H_j$.
  Somit ist $\{H_1, \dots, H_n\} = \{\pi H_1 \pi^{-1} : \pi \in A_n\}$. $(*)$
  [weil $n \geq 3$ ex. für alle $j \neq 1$ ein $\pi \in A_n$ mit $\pi(1)=j$]
  Weiter ist H_i einfach für alle $i \in [n]$, denn $H_i \cong A_{n-1}$ und nach Voraussetzung ist A_{n-1} einfach.

Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass ein nicht-trivialer Normalteiler $K \trianglelefteq A_n$ existiert. Dann gilt für jedes $i \in [n]$, $H_i \cap K \trianglelefteq H_i$, und weil H_i einfach ist gilt

$$\text{entweder } H_i \cap K = \{\iota\} \text{ oder } H_i \cap K = H_i.$$

Wir zeigen $H_i \cap K = \{\iota\}$ für alle $i \in [n]$ und führen diese Aussage zu einem Widerspruch.

- $H_i \cap K = \{\iota\}$: Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass ein $j_0 \in [n]$ existiert mit $H_{j_0} \cap K = H_{j_0}$. Dann ist $H_{j_0} \leq K$ und mit $(*)$ ex. für jedes $i \in [n]$ ein $\pi \in A_n$ mit $\pi H_{j_0} \pi^{-1} = H_i$.
  Weil $H_{j_0} \leq K \trianglelefteq A_n$, ist dann $H_i = \pi H_{j_0} \pi^{-1} \leq \pi K \pi^{-1} = K$, d.h. $H_i \leq K$ für alle $i \in [n]$. Ist $\pi \in A_n$, so ist π ein Produkt von 3-Zyklen und weil $n>3$, ist jeder 3-Zykel in einem H_ℓ (für ein $\ell \in [n]$). Weil K alle Untergruppen H_i enthält, enthält K alle 3-Zyklen und somit ist $K = A_n$ $\lightning$ zu $K \neq A_n$
  D.h. es gilt $H_i \cap K = \{\iota\}$ für alle $i \in [n]$.

- Sei nun $\iota \neq \sigma \in K$. Somit gilt für alle $i \in [n]$, $\sigma \notin H_i$, d.h. σ fixiert kein Element aus $[n]$. Sei $a \in [n]$ und sei $b = \sigma(a) \neq a$. Weil $n>3$ ex. ein $c \in [n]$ mit $c \neq a$, $c \neq b$, $c \neq \sigma^{-1}(a)$.

- Für $d := \sigma(c)$ ist dann $d \neq c$ $(\sigma(c) \neq c)$, $d \neq a$ $(\sigma(c) \neq \sigma\sigma^{-1}(a))$, und $d \neq b$ $(\sigma(a) = b$ und $a \neq c)$. Somit ist σ von der Form $\sigma = (a\, b \ldots\ldots \ldots (c\, d \ldots$ mit a, b, c, d paarweise verschieden.
- Weil $n \geq 6$ können wir weitere zwei Elemente $e, f \in [n]$ verschieden von a, b, c, d wählen und die Permutation

$$\tau := \underbrace{(a\, b)}_{\notin A_n}\underbrace{(c\, d\, e\, f)}_{\notin A_n} \in A_n \text{ bilden.}$$

- $\tau\sigma\tau^{-1}$ bewegt $b \mapsto a$ und $d \mapsto e$. Weiter ist, weil $K \trianglelefteq A_n$ und $\sigma \in K$, $\underbrace{(\tau\sigma\tau^{-1})\sigma}_{=:\rho} \in K$ mit $\rho(a) = a$ (d.h. $\rho \in H_a$) und $\rho(c) = e \neq c$ (d.h. $\rho \neq \imath$), somit $\rho \in H_a \cap K \neq \{\imath\}$ $\lightning$ zu $H_a \cap K = \{\imath\}$

Die Annahme, dass A_n einen nicht-trivialen Normalteiler hat führt somit zu einem Widerspruch, d.h. A_n ist einfach (für $n \geq 5$). ⊣

Proposition 7.12 Der einzige nicht-triviale Normalteiler von S_n (für $n \geq 5$) ist A_n.

Beweis: Sei $K \trianglelefteq S_n$ (für $n \geq 5$) mit $\{\imath\} \neq K \ntrianglelefteq S_n$. Ist $\{\imath\} \neq K \cap A_n$, so ist $K \cap A_n \trianglelefteq A_n$. Mit Thm. 7.11 ist dann $A_n \leqq K$ und aus $[S_n : A_n] = 2$ folgt $K = A_n$.

- Ist $\{\imath\} = K \cap A_n$, so gilt für jedes $\pi \in K$, $\pi \neq \{\imath\}$, π ist ungerade und $\pi^2 = \imath$, d.h. $\pi = (i\,j)(\ldots)\ldots$ ist eine ungerade Anzahl von paarweise disj. Transpositionen.

  Sei $\rho \in S_n$ so, dass $\rho\pi\rho^{-1} \neq \pi$, dann ist $\underbrace{\rho\pi\rho^{-1}}_{\in K \trianglelefteq S_n}\underbrace{\pi^{-1}}_{\in K} \neq \imath$,

  aber $\underbrace{(\rho\pi\rho^{-1})}_{\notin A_n}\underbrace{\pi}_{\notin A_n} \in A_n$ $\lightning$ zu $K \cap A_n = \{\imath\}$

⊣

Als unmittelbare Folgerung aus Prop. 7.12 erhalten wir, dass S_n nicht auflösbar ist für $n \geq 5$.