Intermezzo: Das Hausdorff Paradoxon

Als Beispiel einer Gruppenoperation betrachten wir das sogenannte <u>Hausdorff Paradoxon</u> aus dem folgt, dass es in $\mathbb{R}^3$ kein endlich additives Mass gibt, welches auf allen Mengen definiert ist.

- Die Menge, auf der wir eine Untergruppe H von $SO(3)$ operieren lassen ist die 2-dim. Einheitssphäre S_2, also die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ mit Zentrum im Ursprung.
- Die Gruppe $H \leq SO(3)$ ist die Gruppe, die von den folgenden beiden Drehungen φ und ψ erzeugt wird:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Drehung um π um Achse durch $(1,0,1)$

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um z-Achse

Es ist also $H = \langle \{\varphi, \psi\} \rangle \leq SO(3)$.

Bevor wir $H \curvearrowright S_2$ betrachten, untersuchen wir die Gruppe H: Es gilt $\varphi^2 = \iota$ (Identität) und $\psi^3 = \iota$, d.h. $\varphi^{-1} = \varphi$ und $\psi^{-1} = \psi^2$. Jedes Element $\rho \in H$ lässt sich also schreiben als

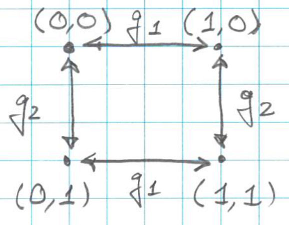
$$\rho = \varphi^{\varepsilon_0} (\psi^{\varepsilon_1} \varphi \cdots \psi^{\varepsilon_n} \varphi) \psi^{\varepsilon_{n+1}} \qquad (*)$$

wobei $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ für $1 \leq k \leq n$, $\varepsilon_0 \in \{0, 1\}$ und $\varepsilon_{n+1} \in \{0, 1, -1\}$.

Es lässt sich zeigen [siehe Serie 4], dass die Elemente $\rho \in H$, geschrieben in der Form $(*)$, paarweise verschieden sind, d.h. jedes $\rho \in H$ lässt sich eindeutig in der Form $(*)$ schreiben.

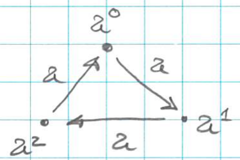
- Nun betrachten wir den sogenannten <u>Cayley-Graphen</u> von H. <u>Def.</u> Ist $G = \langle \{g_1, \dots, g_n\} \rangle$ eine endl. erzeugte Gruppe (mit den Generatoren $g_1, \dots, g_n$), dann besteht die Punktmenge (oder Knotenmenge) des Cayley-Graphen von G aus den Elementen $a \in G$ und $a, b \in G$ sind durch durch eine gerichtete und mit einem g_i bezeichnete Kante verbunden wenn $b = g_i a$, d.h. $a \xrightarrow[g_i]{} g_i a$.

<u>Bsp.</u> · $C_2 \times C_2$ werde durch $g_1 = (1,0)$ und $g_2 = (0,1)$ erzeugt.

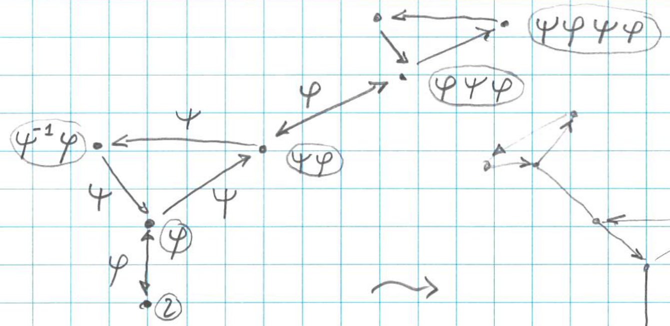


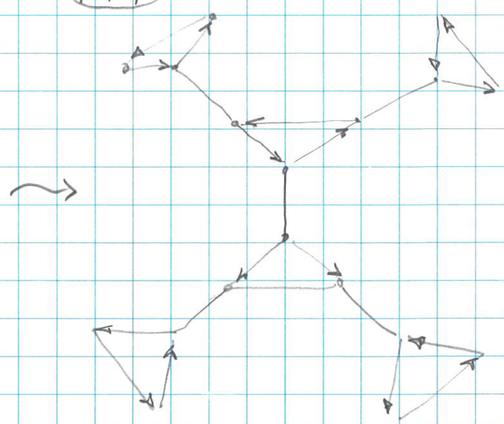
Cayley-Graph von $C_2 \times C_2$

· C_3 werde durch a erzeugt:



Der Cayley-Graph von H sieht wie folgt aus:





Markierung:

- 2 mit ①
- zwei mit einer Kante verbundene Knoten erhalten versch. Bezeichnungen.
- Immer ein Knoten einer φ-Kante $\xleftrightarrow{\varphi}$ ist mit ① bezeichnet.

Markierung mit ①, ②, ③

Es folgt, dass die Knoten eines "Dreiecks" immer mit ①, ②, ③ bezeichnet sind. [wir können einen Alg. angeben für die Markierung; brauchen AC nicht]

- Nun kommen wir zur Gruppenoperation $H \curvearrowright S_2$.
  - Die Punkte auf S_2 zerfallen in paarweise disjunkte Orbits.
  - Nach Definition von H besitzt jeder Orbit abzählbar unendlich viele Punkte. [Bem. H ist abzählbar]
  - Weil S_2 überabzählbar viele Punkte besitzt, ex. also überabzählbar viele Orbits.

Weiter gilt, dass jeder Punkt $x \in S_2$ der im Orbit eines Fixpunktes $y \in S_2$ liegt selbst ein Fixpunkt ist, wobei $y \in S_2$ ein Fixpunkt ist falls ein $\rho \in H, \rho \neq 2$ ex. mit $\rho y = y$ (y ist ein Schnittpunkt der Drehachse von ρ mit S_2): Ist $x \in [y]$, dann ex. $\sigma \in H$ mit $\sigma y = x$. Gilt $\rho y = y$, so ist

Fixpunkt von ρ

$$(\sigma\rho\underbrace{\sigma^{-1})(x)}_{=y} = (\sigma\underbrace{\rho)y}_{=y} = \sigma y = x$$

also ist x ein Fixpunkt (bzgl. Drehung $\sigma\rho\sigma^{-1}$).

Sei nun $F \subseteq S_2$ die abzählbare Menge der Fixpunkte und sei $S_2^* := S_2 \setminus F$. Dann gilt für alle $x \in S_2^*$ und alle $\rho \in H$ mit $\rho \neq 2$: $\rho x \neq x$.

- Sei $O := \{[x] : x \in S_2^*\}$, d.h. $O = S_2^*/H$, die Menge der Orbits mit $x \in S_2^*$. Dann ist O eine überabzählbare Menge von abzählbaren Mengen. Mit Hilfe des Auswahlaxioms wählen wir aus jedem Orbit in O genau einen Repräsentanten aus; die Menge aller Repräsentanten bezeichnen wir mit M.

- Die Punkte $x \in S_2^*$ bezeichnen wir mit ①, ②, ③ wie folgt:
  - alle Punkte aus M erhalten die Bezeichnung ①.
  - ist $x \in S_2^*$, so ex. genau ein Punkt $y \in M$ und genau ein $\rho_x \in H$ mit $\rho_x y = x$. Wir bezeichnen nun x mit der Bezeichnung, welche ρ_x im Cayley-Graphen hat.

Schliesslich sei:

$$A := \{x \in S_2^* : x \text{ ist mit ① bezeichnet}\}$$
$$B := \{x \in S_2^* : \text{—"— ② —"—}\}$$
$$C := \{x \in S_2^* : \text{—"— ③ —"—}\}$$

- Es gilt nun: $S_2 = \underbrace{A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C}_{= S_2^*} \,\dot\cup\, F$ [Feine Nullmenge]

$$B = \varphi[A], \quad C = \varphi^{-1}[A], \quad B \,\dot\cup\, C = \varphi[A]$$

d.h. $A \cong B \cong C$ und $A \cong B \,\dot\cup\, C$.

-