I GRUPPENTHEORIE

0. AXIOME DER GRUPPENTHEORIE

Die Signatur der Gruppentheorie ist $\mathcal{L}_{GT} = \{e, \circ\}$, wobei e ein Konstantensymbol und $\circ$ ein binäres Funktionssymbol ist. Mit den Axiomen legen wir die Eigenschaften von e & $\circ$ fest.

GT_0: $\forall x \forall y \forall z \, (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$ "die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ"

GT_1: $\forall x \, (e \circ x = x)$ "e ist links-neutral"

GT_2: $\forall x \exists \bar{x} \, (\bar{x} \circ x = e)$ "für jedes x ex. ein links-inverses Element $\bar{x}$"

Bem: • Ein Modell dieses Axiomensystems ist z.B. $\mathbb{Z}$ mit $e^{\mathbb{Z}} := 0$ und $\circ^{\mathbb{Z}} := +$

• recht-neutrales Element? rechts-inverse? Eindeutigkeit dieser Elemente?

Satz 0.0 (a) $\forall x \forall \bar{x} \, (\bar{x} \circ x = e \rightarrow x \circ \bar{x} = e)$

"jedes links-inverse von x ist auch rechts-inverses von x"

(b) $\forall x \, (x \circ e = x)$

"e ist auch rechts-neutral"

Beweis: (a) Sei $\bar{x}$ das links-inverse von x und sei $\bar{\bar{x}}$ das links-inverse von $\bar{x}$.

$$x \circ \bar{x} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ links-neutral}}}{=} e \circ (x \circ \bar{x}) = \underbrace{(\bar{\bar{x}} \circ \bar{x})}_{=e} \circ (x \circ \bar{x})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \circ \text{ assoz.}}}{=} \bar{\bar{x}} \circ \underbrace{(\underbrace{(\bar{x} \circ x)}_{=e} \circ \bar{x})}_{= e \circ \bar{x} = \bar{x}} = \bar{\bar{x}} \circ \bar{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{\bar{x}} \text{ links-inv. von } \bar{x}}}{=} e$$

(b) $$x \circ \underbrace{e}_{= \bar{x} \circ x} = x \circ \underbrace{(\bar{x} \circ x)}_{=e} \underset{\substack{\uparrow \\ \circ \text{ assoz.}}}{=} \underbrace{(x \circ \bar{x})}_{=e} \circ x = e \circ x \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ Links-neutral}}}{=} x$$

$\dashv$

Folgerung: Aus links-neutral & links-invers folgt neutral & invers.

Satz 0.1 (a) Das Neutralelement (einer Gruppe) ist eindeutig.
(b) Jedes Element x (einer Gruppe) hat genau ein inverses Element $\bar{x}$.

Beweis: (a) Seien e, e' Neutralelemente (links/rechts).

$$e \circ e' = \begin{cases} e' & \text{weil } e \text{ links-neutral} \\ e & \text{weil } e' \text{ rechts-neutral} \end{cases} \Rightarrow e = e'$$

(b) Seien $\bar{x}, \tilde{x}$ inverse Elemente von x (links/rechts).
Es gilt somit $x \circ \bar{x} = e = \tilde{x} \circ x$.

$$\tilde{x} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ rechts-neutral}}}{=} \tilde{x} \circ e = \tilde{x} \circ \underbrace{(x \circ \bar{x})}_{=e} \underset{\substack{\uparrow \\ \circ \text{ assoz.}}}{=} \underbrace{(\tilde{x} \circ x)}_{=e} \circ \bar{x} = e \circ \bar{x} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ links-neutral}}}{=} \bar{x}$$

$\dashv$

Bem: GT_1 & GT_2 können auch mit rechts-neutral und rechts-invers formuliert werden; oder direkt mit Neutralelement und Inversen.

Die Gruppenaxiome können wir also wie folgt formulieren:

GT_0^*: Die binäre Operation (Funktion) $\circ$ ist assoziativ.

GT_1^*: Es gibt genau ein Neutralelement.

GT_2^*: Jedes Element (der Gruppe) hat genau ein Inverses.

Bem: Mit GT_2^* können wir eine Funktion $inv: x \to \bar{x}$ definieren.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

$$\forall x \forall y \forall z \,(x \circ z = y \circ z \to x = y)$$

"wir können kürzen"

In GT_1 & GT_2 können wir "links" durch "rechts" ersetzen; wir dürfen aber nicht "links" & "rechts" mischen:

Proposition 0.2 Eine Menge S mit einer assoziativen Operation $\circ$ und einem links-neutralen Element, in der jedes Element ein rechts-Inverses hat, ist nicht notwendigerweise eine Gruppe (Modell der Gruppenaxiome).

Bem: Man darf "links" und "rechts" mischen falls das Neutralelement eindeutig ist.

Beweis: Sei $S = \{e, a\}$; $\forall x \forall y \,(x \circ y = y)$

- Dann gilt: $e \circ e = e$, $e \circ a = a$
  d.h. e ist links-neutral
- Weiter gilt: $e \circ e = e$, $a \circ e = e$
  d.h. jedes Element besitzt ein rechts-Inverses; $\bar{e} = e = \bar{a}$
- Das Element a besitzt kein links-Inverses. ↯ zu GT_2 ⊣