1. BEISPIELE VON GRUPPEN

Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und einer binären Operation $\circ : G \times G \to G$ ist eine <u>Gruppe</u>, falls die Struktur $(G, e, \circ)$ die Gruppenaxiome erfüllt, d.h. $(G, e, \circ)$ ist ein Modell von GT (bzw. GT*).

[<u>Bem.</u> Wir schreiben meist $(G, \circ)$ oder nur G anstelle von $(G, e, \circ)$.]

Üblicherweise identifizieren wir die <u>Struktur</u> $(G, e, \circ)$ mit der <u>Menge</u> G und sagen "G ist eine Gruppe" bzw. "G mit $\circ$ ist eine Gruppe".

<u>Def.</u> Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und ist die Operation $\circ$ kommutativ, so heisst die Gruppe <u>abelsch</u> (d.h. "abelsch" ist für Gruppen ein Synonym für "kommutativ").

- Einige unendliche abelsche Gruppen:

$$(\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}, +)$$

$$(\mathbb{Q}^*, \cdot),\ (\mathbb{R}^*, \cdot),\ (\mathbb{C}^*, \cdot) \qquad [\,^* \text{ bedeutet ohne } 0\,]$$

$$(\mathbb{Q}^+, \cdot),\ (\mathbb{R}^+, \cdot),\ (\mathbb{U}, \cdot)$$

$$\text{mit } \mathbb{U} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

Sei $2^{\mathbb{Z}} := \{ 2^x : x \in \mathbb{Z} \}$. Dann ist $(2^{\mathbb{Z}}, \cdot)$ eine Gruppe mit Neutralelement $1 = 2^0$.

[Begründung: $\underset{x}{\underset{\wr}{2^x}} \cdot \underset{+\,y}{\underset{\wr}{2^y}} = \underset{(x+y)}{2^{x+y}}$; $1 = \underset{0}{\underset{\wr}{2^0}}$ $\Big\}$ $\underset{(\mathbb{Z}, 0, +)}{\underset{\wr}{(2^{\mathbb{Z}}, 1, \cdot)}}$

Die beiden Gruppen $(2^{\mathbb{Z}}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ sind im Wesentlichen dieselben Gruppen, nur die Elemente "heissen" anders; die beiden Gruppen sind "isomorph":

__Def.__ Seien $(G_1, \circ)$ und $(G_2, *)$ zwei Gruppen. Die beiden Gruppen sind __isomorph__, bezeichnet mit $G_1 \cong G_2$, wenn es eine Bijektion $\varphi: G_1 \to G_2$ zwischen den Mengen G_1 & G_2 gibt, so dass für alle $x, y \in G_1$ gilt:

$$\underbrace{\varphi(\underbrace{x \circ y}_{\in G_1})}_{\in G_2} = \underbrace{\underbrace{\varphi(x)}_{\in G_2} * \underbrace{\varphi(y)}_{\in G_2}}_{\in G_2}$$

Eine Abbildung φ mit diesen Eigenschaften heisst __Isomorphismus__ (zwischen G_1 und G_2).

__Faktum:__ Ist φ ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2, so ist φ^{-1} (die Umkehrabbildung von φ) ein Isomorphismus zwischen G_2 und G_1.

es gilt auch:
$\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$
$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}$

Begründung:
- Weil φ eine Bijektion zwischen G_1 und G_2 ist, ist φ^{-1} ——— " ——— G_2 und G_1.
- Seien $u, v \in G_2$, und seien $x, y \in G_1$ mit $\varphi(x) = u$ und $\varphi(y) = v$:

$$\varphi^{-1}(u * v) = \varphi^{-1}(\varphi(x) * \varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(x \circ y))$$
$$= x \circ y = \varphi^{-1}(u) \circ \varphi^{-1}(v)$$

Eine notwendige, aber nicht hinreichende, Bedingung, dass zwei Gruppen isomorph sind ist, dass die beiden Gruppen "gleich viele Elemente" haben, d.h. dieselbe Kardinalität haben.

<u>Def.</u> Ist G eine Gruppe, so heisst die Kardinalität $|G|$ der Menge G die <u>Ordnung</u> der Gruppe, bezeichnet mit $\mathrm{ord}(G)$ (oder auch $|G|$).

<u>Faktum:</u> $G_1 \cong G_2 \longrightarrow \mathrm{ord}(G_1) = \mathrm{ord}(G_2)$

<u>Beispiel:</u> $(\mathbb{Q}, +) \ncong (\mathbb{R}, +)$, weil $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$.

- Einige unendliche nicht-abelsche Gruppen:
  Sei $M(n)$ die Menge aller reellen $n \times n$ Matrizen.
  Dann ist $(M(n), \cdot)$ ein sogenanntes <u>Monoid</u> aber i.A. keine Gruppe (es ex. Neutralelement I_n aber i.A. haben Matrizen keine Inversen; die Mult. ist aber assoziativ).

  - Sei $GL(n) := \{A \in M(n) : \det(A) \neq 0\}$, dann ist $(GL(n), \cdot)$ eine nicht-abelsche Gruppe. ["general lin. group"]
    Bem. $GL(1) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$

  - $SL(n) := \{A \in M(n) : \det(A) = 1\}$ ["special lin. group"]
    Bem. $SL(1) \cong (\{1\}, \cdot)$

  - $O(n) := \{A \in M(n) : A \cdot A^t = I_n\}$ ["orthogonal group"]
    Bem. $O(1) \cong (\{-1, 1\}, \cdot)$

  - $SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$ ["special orth. group"]
    Bem. $SO(1) \cong (\{1\}, \cdot)$

    Jedes Element $A \in SO(2)$ ist von der Form
    $$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ d.h. } SO(2) \cong (\mathbb{U}, \cdot)$$
    und ist abelsch; aber für $n \geq 3$ ist $SO(3)$ nicht-abelsch.

- Einige endliche abelsche Gruppen:

  Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $C_n := \{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$. Auf der Menge C_n definieren wir eine binäre Operation "$\cdot$" wie folgt:

$$a^l \cdot a^m = \begin{cases} a^{l+m} & \text{für } l+m < n, \\ a^{(l+m)-n} & \text{für } l+m \geq n. \end{cases}$$

  Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist dann C_n eine <u>abelsche Gruppe</u> der Ordnung n: a^0 ist das Neutralelement und für $l \neq 0$ ist $a^l \cdot a^{n-l} = a^0$; Assoz. lässt sich leicht nachrechnen und Komm. ist klar.

<u>Def:</u> C_n heisst <u>zyklische Gruppe</u> der Ordnung n.

[Bem. zu ∞-zyklischen Gruppen, die auch zykl. heissen]

- Einige endliche nicht-abelsche Gruppen:

  Sei $X = \{1, 2, \dots, n\}$ eine endliche Menge und sei S_n die Menge aller Bijektionen $\sigma: X \to X$. Die Komposition $\circ$ von zwei Bijektionen ist wieder eine Bijektion; somit ist $\circ$ eine binäre Operation auf S_n. Weiter ist $\circ$ assoziativ:

  $x \in X$; $\sigma, \tau, \pi \in S_n$, dann gilt

$$((\sigma \circ \tau) \circ \pi)(x) = (\sigma \circ \tau)(\pi(x)) = \sigma \circ (\tau(\pi(x)))$$
$$= \sigma(\tau(\pi(x))) = \sigma((\tau \circ \pi)(x)) = (\sigma \circ (\tau \circ \pi))(x)$$

  Die Identitätsabbildung $\iota: \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x \end{array}$ ist eine Bijektion, also $\iota \in S_n$; ι ist das Neutralelement. Da jedes $\sigma \in S_n$ ein Inverses $\sigma^{-1} \in S_n$ besitzt, ist also $(S_n, \circ)$ eine Gruppe. Es gilt $|S_n| = n!$

<u>Def.</u> Die Gruppe S_n heisst <u>symmetrische Gruppe</u> oder <u>Permutationsgruppe</u> vom <u>Grad n</u>.

Bem. $S_1 \cong C_1$; $S_2 \cong C_2$

- $|S_3| = 6$, $\sigma: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$ $\quad \tau: \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$

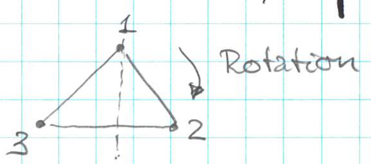
$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1) = 2$$
$$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 3$$

D.h. S_3 ist eine nicht-abelsche Gruppe.
Allg. ist S_n (für $n \geq 3$) eine nicht-abelsche Gruppe.

Für (geometrische) Körper und Figuren in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ können wir die Menge aller Drehungen in $\mathbb{R}^3$ betrachten, welche den Körper bzw. die Figur in sich überführen. Diese Menge bildet unter der Komposition der Abbildungen eine Gruppe.

Def: Die Gruppe aller Bewegungen in $\mathbb{R}^3$ welche ein regelmässiges n-Eck in sich überführen heisst <u>Diedergruppe</u> vom Grad n und wird mit D_n bezeichnet. ["di-eder" $\hat{=}$ 2-flach]

Bem. $D_3 \cong S_3$; für $n \geq 3$ gilt $|D_n| = 2n$, und D_n ist nicht-abelsch.



Spiegelung, ist eine Drehung in $\mathbb{R}^3$

[**Bem.** Bei Polyedern (z.B. den platonischen Körpern) heissen die entsprechenden Gruppen <u>Symmetriegruppen</u>. Z.B. Symmetriegruppe des Würfels, Dodekaeders etc.
Erinnerung: Wir betrachten nur Drehungen, keine Spiegelungen.]

- Gruppentafeln oder Multiplikationstabellen:

Sei $\circ$ eine binäre Operation auf einer Menge $S = \{a, b, c, \dots\}$. Dann lässt sich $\circ$ in einer Tabelle darstellen:

$\circ$	a	b	c	$\dots$
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$	$\dots$
b	$b \circ a$			
c	$c \circ a$	$\ddots$		
$\vdots$				

<u>Bsp.</u> Sei $(S, \circ)$ eine Gruppe mit $S = \{e, a, b\}$, wobei e das Neutralelement ist.

$\circ$	e	a	b	
e	e	a	b	← Zeile ist bestimmt weil e Neutralelement
a	a	b	e	← weder a noch b
b	b	e	a	← hier muss a stehen weil wir kürzen können

↑ Spalte bestimmt weil e Neutralelement

Es gilt also $(S, \circ) \cong C_3 = \{\underbrace{a^0}_{=e}, \underbrace{a^1}_{=a}, \underbrace{a^2}_{=b}\}$

d.h. jede Gruppe der Ordnung 3 ist isomorph zu C_3, insbes. abelsch.

- Produkte von Gruppen

Seien $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ Gruppen und sei $G \times H := \{\langle x, y\rangle : x \in G \wedge y \in H\}$.

Auf $G \times H$ definieren wir eine binäre Operation wie folgt:

$$\langle x_1, y_1\rangle * \langle x_2, y_2\rangle := \langle x_1 \circ x_2, y_1 \bullet y_2\rangle$$

Dann ist $(G \times H, *)$ eine Gruppe der Ordnung $|G| \cdot |H|$ mit Neutralelement $\langle e_G, e_H\rangle$ und Inversen $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$.

[Bem. $C_2 \times C_3 \cong C_6$, aber $C_2 \times C_6 \not\cong C_{12}$]