4. Die Isomorphiesätze

<u>Erinnerung</u>: Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi: G \to H$ ist ein <u>Homomorphismus</u> falls für alle $x, y \in G$ gilt:

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

<u>Def.</u>
- Ist $\varphi: G \to H$ ein Homom. und ist φ bijektiv, so ist φ ein <u>Isomorphismus</u>.

endon ≙ innen

- Ist $\varphi: G \to G$ ein Homom., so ist φ ein <u>Endomorphismus</u>.
- Ist $\varphi: G \to G$ ein Isom., so ist φ ein <u>Automorphismus</u>.

auto ≙ eigen, selbst

Die Menge aller Autom. $\varphi: G \to G$ wird mit $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichnet.

Unter Homom. bleibt die Gruppenstruktur erhalten:

<u>Proposition 4.1</u> Ist $\varphi: G \to H$ ein Homom., dann ist $\varphi(e_G) = e_H$ und für alle $x \in G$ gilt: $\varphi(\underbrace{x^{-1}}_{\in G}) = \underbrace{\varphi(x)^{-1}}_{\in H}$

und es gilt: $\varphi[G] \leq H$,

wobei $\varphi[G] := \{\varphi(x) : x \in G\}$.

[Beweis in Aufgabe 31]

<u>Proposition 4.2</u> Ist G eine Gruppe, dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen ebenfalls eine Gruppe, die sogenannte <u>Automorphismengruppe</u> von G.

<u>Beweis</u>: Seien $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathrm{Aut}(G)$. Es ist zu zeigen:

(1) $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$ (2) $\circ$ ist assoziativ

(3) es ex. ein Neutralelemt (4) zu jedem Element ex. ein Inverses

... ⊣

<u>Def.</u> Ist $\varphi: G \to H$ ein Homom., dann heisst
$$\ker(\varphi) := \{x \in G : \varphi(x) = e_H\}$$
der <u>Kern von φ</u>, bezeichnet mit $\ker(\varphi)$.

<u>Theorem 4.3</u> Ist $\varphi: G \to H$ ein Homom., dann ist $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

<u>Beweis:</u> • Zuerst zeigen wir $\ker(\varphi) \leq G$.

Sind $a, b \in \ker(\varphi)$, so ist
$$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \underbrace{\varphi(a)}\,\underbrace{\varphi(b)}^{-1} = e_H \; e_H^{-1} = e_H$$
also ist $ab^{-1} \in \ker(\varphi)$.

• Nun zeigen wir $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

Sei $x \in G$ und $a \in \ker(\varphi)$, dann ist
$$\varphi(xax^{-1}) = \varphi(x)\underbrace{\varphi(a)}_{=e_H}\varphi(x)^{-1} = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e_H,$$
also ist $xax^{-1} \in \ker(\varphi)$.

<u>Lemma 4.4</u> Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist die Abbildung (bzw. "Projektion")
$$\pi: G \longrightarrow G/N$$
$$x \longmapsto xN$$
ein surjektiver Homom., der sogenannte <u>natürliche Homom.</u> von G auf G/N, und es gilt $\ker(\pi) = N$.

<u>Beweis:</u> • Für $x, y \in G$ gilt $\pi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi(x)\pi(y)$, d.h. π ist ein Homomorphismus.

• Für $xN \in G/N$ ist $\pi(x) = xN$, d.h. π ist surjektiv.

• Mit Lem. 2.4 (c) gilt $N = xN \iff x \in N$, d.h.
$$\ker(\pi) = \{x \in G : x \in N\} = N.$$

⊣

Korollar 4.5 Ist $N \trianglelefteq G$, dann ex. eine Gruppe H und ein Homom. $\varphi: G \to H$ mit $\ker(\varphi) = N$.

Beweis: Sei $H := G/N$ und sei $\varphi: G \to H$, $x \mapsto xN$ der nat. Homom. $\dashv$

Theorem 4.6 (Erster Isomorphiesatz) Sei $\psi: G \to H$ ein surjektiver Homom., sei $N = \ker(\psi)$, und sei $\pi: G \to G/N$ der nat. Homom. von G auf G/N. Dann ex. genau ein Isomorphismus $\varphi: G/N \xrightarrow{\sim} H$ mit $\psi = \varphi \circ \pi$. Mit anderen Worten, folgendes Diagramm "kommutiert":

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & H \\ G/N \arrow[ur, "\sim", "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

[versch. Verkettungen von Abb. führen auf dasselbe Ergebnis]

Beweis: Definiere $\varphi: G/N \to H$ durch $\varphi(xN) := \psi(x)$ für $x \in G$.
Dann gilt $\psi(x) = \varphi(xN) = \varphi(\pi(x)) = (\varphi \circ \pi)(x)$.
Es bleibt noch zu zeigen: φ ist wohldefiniert, ein Homom., injektiv, surjektiv, und einzig mit diesen Eigenschaften.

- φ ist wohldefiniert: Ist $xN = yN$, dann ist $x^{-1}y \in N$ (Lem. 2.4 (d)). Weil $N = \ker(\psi)$, gilt $\psi(x^{-1}y) = e_H$
$$\Rightarrow \psi(x)^{-1}\psi(y) = e_H$$
Somit ist $\psi(x) = \psi(y)$ und $\varphi(xN) = \psi(x) = \psi(y) = \varphi(yN)$.

- φ ist ein Homomorphismus: Seien $xN, yN \in G/N$. Dann ist $\varphi((xN)(yN)) = \varphi((xy)N) = \psi(xy) =$
$$= \psi(x)\psi(y) = \varphi(xN)\varphi(yN).$$

- φ ist injektiv: $\varphi(xN) = \varphi(yN) \iff \varphi(x) = \varphi(y)$
$\iff e_H = \varphi(x)^{-1}\varphi(y)$
$\iff e_H = \varphi(x^{-1}y)$
$\iff x^{-1}y \in \ker(\varphi) \iff x^{-1}y \in N$
$\iff xN = yN$

- φ ist surjektiv: Weil φ surj. ist ex. für jedes $z \in H$ ein $x \in G$ mit $\varphi(x) = z$; also ist $\varphi(xN) = \varphi(x) = z$ und somit ist φ surjektiv.

- φ ist die einzige Abb. mit diesen Eigenschaften:
Sei $\tilde{\varphi}$ ein weiterer Isomorphismus $G/N \to H$, $\tilde{\varphi} \neq \varphi$ und $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Dann ex. eine Nebenklasse $xN \in G/N$ mit $\tilde{\varphi}(xN) \neq \varphi(xN)$.
Daraus folgt:
$$\varphi(x) = (\tilde{\varphi} \circ \pi)(x) = \tilde{\varphi}(xN) \neq \varphi(xN) = (\varphi \circ \pi)(x) = \varphi(x)$$
was offensichtlich ein Widerspruch ist.

$\dashv$

Bsp. $C/T \cong C_2$; $C/\underbrace{C_2 \times C_2}_{\text{Normalteiler}} \cong D_3$

[Einfacherer Beweis mit $\varphi[xN] = \{z\}$ für $z \in H$]

Theorem 4.7 (Zweiter Isomorphiesatz)
Ist $N \trianglelefteq G$ und $K \leq G$, dann gilt:
(a) $KN = NK \leq G$
(b) $N \trianglelefteq KN$
(c) $(N \cap K) \trianglelefteq K$
(d) die Abb. $\varphi: K/(N \cap K) \longrightarrow KN/N$
$x(N \cap K) \longmapsto xN$
ist ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> (a) das ist Thm. 2.14

(b) Weil $KN \leq G$ und $N \subseteq KN$ ist $N \leq KN$,
und weil $N \trianglelefteq G$ ist $N \trianglelefteq KN$.

(c) Ist $x \in K$ und $a \in (N \cap K)$, dann ist

$$xax^{-1} \begin{cases} \in K \text{ (weil } a, x \in K) \\ \in N \text{ (weil } N \trianglelefteq G \text{ und } a \in N) \end{cases} \Rightarrow xax^{-1} \in (N \cap K)$$

und somit ist $(N \cap K) \trianglelefteq K$.

(d) Definiere $\psi : K \to KN/N$ durch $\psi(x) := xN$.
Dann ist ψ ein surjektiver Homom. mit
$\ker(\psi) = \{k \in K : k \in N\} = N \cap K$.
Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & KN/N \\ K/(N \cap K) = \ker(\psi) \arrow[ur, "\varphi", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

weil ψ surj. ist, ist φ mit dem 1. Isom.-Satz ein Isomorphismus.

$\varphi(\pi(x)) = \varphi(x(N \cap K)) = \psi(x)$

$\dashv$

<u>Theorem 4.8</u> (Dritter Isomorphiesatz)

Seien $K, N \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq K$. Dann ist $K/N \trianglelefteq G/N$ und die Abbildung

$$\varphi : G/K \longrightarrow {}^{G/N}\!\big/_{K/N}$$
$$xK \longmapsto (xN)(K/N)$$

ist ein Isomorphismus.

[Beweis Aufgabe 35]

<u>Bsp.</u> $G \cong C$, $K \cong T$, $N \cong C_2 \times C_2$ mit $N \trianglelefteq T, C$; $\underbrace{C/T}_{\cong C_2} \cong \overbrace{C/C_2 \times C_2}^{D_3} \Big/ \underbrace{T/C_2 \times C_2}_{\cong}$