7. Permutationsgruppen

Def. Für positive $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet S_n die <u>Permutationsgruppe</u> vom Grad n; d.h. S_n ist die Menge aller Bijektionen $\{1,\dots,n\} \to \underbrace{\{1,\dots,n\}}_{=:[n]}$ mit der Verknüpfung von Abbildungen als Operation. (vereinfacht die Notation)

Bem: $|S_n| = n!$ und das Neutralelement von S_n ist die identische Abb. ι mit $\iota(k) = k$ (für alle $k \in \{1,\dots,n\}$).

Theorem 7.1 (Cayley) Ist G eine Gruppe der Ordnung n, so ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

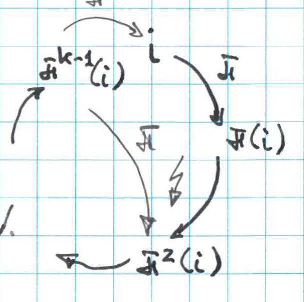
[Beweis in den Übungen]

Proposition 7.2 Sei $\pi \in S_n$, $i \in \{1,\dots,n\}$ und sei k die kleinste positive Zahl für die gilt $\pi^k(i) \in \{\underbrace{i}_{=:\pi^0(i)}, \pi^1(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$. Dann ist $\pi^k(i) = i$.

Beweis: Wäre z.B. $\underbrace{\pi(\pi^{k-1}(i))}_{=\pi^k(i)} = \pi^2(i) = \pi(\pi(i))$

dann wäre $\pi(\pi^{k-1}(i)) = \pi(\pi(i))$

$\Longrightarrow \pi$ nicht bijektiv.



⊣

Def. Eine Permutation $\rho \in S_n$ ist ein <u>k-Zyklus</u> (für $k \geq 1$) falls ein $i \in \{1,\dots,n\}$ existiert mit

(1) $k = \min\{k' \geq 1 : \rho^{k'}(i) = i\}$,

(2) für alle $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\rho^k(i) : k \in \mathbb{N}\}$ gilt $\rho(j) = j$.

Notation: k-Zyklen ρ werden in der Form $(i, \rho(i), \dots, \rho^{k-1}(i))$ geschrieben, wobei 1-Zyklen nicht aufgeschrieben werden. (üblicherweise)

Bsp: • Die fünf k-Zyklen (für $k \geq 2$) von S_3 sind

$$(1\,2\,3),\ (3\,2\,1),\ (1\,2),\ (1\,3),\ (2\,3)$$

inverse, selbst-invers

• $(1\,3)$ und $(2\,4)$ sind zwei 2-Zyklen von S_4, aber $(1\,3)(2\,4)$ kann nicht als Zykel geschrieben werden.

Def. Zwei Permutationen $\rho, \sigma \in S_n$ heissen <u>disjunkt</u> wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\rho(i) \neq i \rightarrow \sigma(i) = i$$

<u>Faktum 7.3</u> Sind $\rho, \sigma \in S_n$ disjunkte Permutationen, dann gilt $\rho\sigma = \sigma\rho$ (und allg. $(\rho\sigma)^k = \rho^k \sigma^k$).

[Beweis in den Übungen]

<u>Proposition 7.4</u> Jede Permutation $\pi \in S_n$ kann geschrieben werden als Produkt disjunkter Zyklen.

<u>Beweis:</u> Sei $\pi \in S_n$. Mit Prop. 7.2 ex. für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein kleinstes $k_i \geq 1$ sodass $\pi^{k_i}(i) = i$ und $\rho_i = (i, \pi(i), \dots, \pi^{k_i-1}(i))$ ein k_i-Zyklus ist. Sei $Z_i := \{i, \dots, \pi^{k_i-1}(i)\}$ die Menge der Zahlen, welche im Zyklus ρ_i vorkommen. Beachte dass für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: entweder $Z_i = Z_j$ oder $Z_i \cap Z_j = \emptyset$. Ist nun $Z_1 = \{1, \dots, n\}$, so ist $\pi = \rho_1$. Andernfalls wählen wir die kl. Zahl $\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus Z_1$. Ist $Z_1 \cup Z_\ell = \{1, \dots, n\}$ so ist $\pi = \rho_1 \rho_\ell$ wobei ρ_1 und ρ_ℓ disjunkte Zyklen sind. Sonst wählen wir kl. $m \in \{1, \dots, n\} \setminus (Z_1 \cup Z_\ell)$, etc. ⊣

Def. Eine Zerlegung von $\pi \in S_n$ in paarweise disjunkte Zyklen ist eine <u>Zyklenzerlegung</u> von π.

Proposition 7.5 • Ist ρ ein k-Zyklus, so ist $\operatorname{ord}(\rho) = k$.

• Ist π ein Produkt disjunkter Zyklen der Längen $k_1, \dots, k_r$, so ist $\operatorname{ord}(\pi) = \operatorname{kgV}(k_1, \dots, k_r)$.

[Beweis in den Übungen]

Proposition 7.6 Seien $\pi, \rho \in S_n$. Dann erhalten wir die Zyklenzerlegung von $\rho\pi\rho^{-1}$ dadurch, dass wir jede Zahl i in der Zyklenzerlegung von π durch $\rho(i)$ ersetzen.

Beweis: Wir betrachten $\rho\pi\rho^{-1}$ angewandt auf $\rho(i)$:

$$\rho\pi\rho^{-1}(\rho(i)) = \rho(\pi(i))$$

D.h. in der Zyklenzerlegung von $\rho\pi\rho^{-1}$ steht

$$\dots(\dots\ \rho(i)\ \ \rho(\pi(i))\ \dots)\dots$$

andererseits steht in der Zyklenzerlegung von π

$$\dots(\dots\ \ i\ \ \ \pi(i)\ \dots\ )\dots$$

$\dashv$

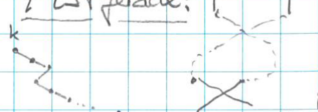
Def. • Eine <u>Transposition</u> ist ein Zyklus der Länge 2, und eine <u>elementare Transposition</u> ist eine Transposition der Form $(i, i+1)$.

• Eine Permutation π heisst <u>gerade</u>, falls π ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist; sonst heisst π <u>ungerade</u>.

Bem: Aus der "Linearen Algebra" ist bekannt, dass jede Permutation entweder gerade oder ungerade ist.

[π gerade $\Longleftrightarrow$ π^{-1} gerade, also genügt es zu zeigen: ι gerade]

ι ist gerade:



jede Kreuzung $\overset{k\quad \ell}{\times}$ kommt eine gerade Anzahl mal vor.

Lemma 7.7 Ein k-Zykel ist genau dann gerade, wenn k ungerade ist.

Beweis: $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3) \cdot \ldots \cdot (i_{k-2}\ i_{k-1})(i_{k-1}\ i_k)$ $\dashv$

Def. $A_n = \{\pi \in S_n : \pi \text{ ist gerade}\}$ ist die alternierende Gruppe vom Grad n.

Faktum 7.8 $A_n \trianglelefteq S_n$

Beweis: Für $n=1$ ist $A_n = S_n$ und für $n \geq 2$ ist
$S_n = A_n \,\dot\cup\, (1\,2)A_n$, also ist $[S_n : A_n] = 2$
und $A_n \trianglelefteq S_n$. ⊣

Proposition 7.9 A_n wird von 3-Zyklen generiert.

Beweis: Wir zeigen, dass Paare von 2-Zyklen mit 3-Zyklen geschrieben werden können:

- Sind i, j, r, s paarweise verschieden, dann ist
$$(i\,j)(r\,s) = (i\,r\,j)(i\,r\,s).$$
- Ist z.B. $i = r$, dann ist
$$(i\,j)(i\,s) = (i\,s\,j).$$ ⊣

Bem. Für die Symmetriegruppen T, C, D der platonischen Körper Tetraeder, Würfel, Dodekaeder gilt: $T \cong A_4$, $C \cong S_4$, $D \cong A_5$.
permutierte Objekte: 4 Flächen des Tetraeders, 4 Raumdiag. des Würfels, 5 Würfel im Dodekaeder

Lemma 7.10 A_5 ist einfach.

Beweis: Wir betrachten die Drehungen der Dodekaedergruppe D.

Art der Drehung:		# Gruppenelemente:
1 Rotation der Ordnung	1	1
15 —— " ——	2	15
10 —— " ——	3	20
6 —— " ——	5	24
		60

- Enthält ein Normalteiler N eine Rotation mit Ordnung > 1, so enthält N alle Rotationen mit dieser Ordnung (Ordnung ist prim, zyklisch ...)
- Für einen nicht-trivialen Normalteiler kommen somit folgende Ordnungen in Frage: 16, 21, 25, 36, 40, 45,
aber keine dieser Zahlen ist ein Teiler von 60 $\Rightarrow A_5$ ist einfach. ⊣