8. Semidirekte Produkte

Erinnerung: Ist G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $|H \cap N| = 1$ und $|N| \cdot |H| = |G|$, dann ist $NH = G = HN$, denn mit Prop. 2.14 gilt $|HN| = \frac{|H| \cdot |N|}{|H \cap N|}$ und mit Thm. 2.15 haben wir $NH = G = HN$, d.h. jedes $u \in G$ lässt sich eind. schreiben als $u = ax \in NH$.
Im Allg. ist aber $ax \neq xa$ für $a \in N$, $x \in H$. Es gilt jedoch (mit obiger Voraussetzung) das folgende

Faktum 8.1 Sind $a, b \in N$, $x, y \in H$, dann ist
$$(ax)(by) = \underbrace{cz}_{\in NH} \quad \text{für } c = a(xbx^{-1}) \in N$$
und $z = xy \in H$, wobei c und z eindeutig sind.

Beweis:
- Eindeutigkeit folgt aus $NH = G$ und $|N| \cdot |H| = |G|$.
- $(ax)(by) = a(xb)(x^{-1}xy) = \underbrace{a\underbrace{(xbx^{-1})}_{\in N}}_{\in N} \underbrace{xy}_{\in H}$,

d.h. $(ax)(by) = cz$ mit $c \in N$, $z \in H$. ⊣

Bemerkung: Wenn wir G als cartesisches Produkt $N \times H$ schreiben mit der Verknüpfung $*$, so gilt: $(a, x) * (b, y) = (\underbrace{a(xbx^{-1})}_{\text{Verknüpfung in } G}, \underbrace{xy})$.

Proposition 8.2 Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, dann ist
$$\begin{aligned} \kappa : H &\longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \\ x &\longmapsto \kappa_x : N \longrightarrow N \\ & \qquad\quad a \longmapsto xax^{-1} \end{aligned}$$
ein Homomorphismus.

Beweis:
- wohldefiniert: Für jedes $x \in H$ ist $\kappa_x \in \mathrm{Aut}(N)$
  - $\kappa_x : N \to N$ bijektiv, weil N ein Normalteiler ist.
  - $\kappa_x(\underbrace{ab}_{\in N}) = \underbrace{xabx^{-1}}_{\in N} = (xax^{-1})(xbx^{-1}) = \kappa_x(a)\,\kappa_x(b)$

- κ ist ein Homomorphismus:

$$\kappa(xy) = \kappa_{xy} : N \longrightarrow N$$
$$a \longmapsto (xy)a(xy)^{-1}$$

es gilt $(xy)a(xy)^{-1} = x(yay^{-1})x^{-1} = \kappa_x(\kappa_y(a))$ (für alle $a \in N$), d.h. $\kappa_{xy} = \kappa_x \circ \kappa_y$ und somit ist $\kappa(xy) = \kappa(x) \circ \kappa(y)$, also κ ein Homom. $\dashv$

<u>Proposition 8.3</u> Ist G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $|H \cap N| = 1$ und $|NH| = |G|$, dann ist
$$G \cong (N \times H, *)$$
mit $(a,x) * (b,y) = (a\,\kappa_x(b), xy)$
wobei
$$\kappa : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$
$$x \longmapsto \kappa_x : N \longrightarrow N$$
$$b \mapsto xbx^{-1}$$

<u>Beweis:</u>
- Jedes Element aus G lässt sich eindeutig schreiben als ax mit $a \in N$, $x \in H$.
- Schreiben wir $(a,x) \in N \times H$ (b,y) für $ax \in G$ by, so erhalten wir mit Faktum 8.1:
$$(ax)(by) = a(xbx^{-1})xy \in G, \text{ also}$$
$$(a,x)(b,y) = (a(xbx^{-1}), xy)$$
$$= (a\,\kappa_x(b), xy) = (a,x) * (b,y) \in N \times H.$$
D.h. die Verknüpfung $(ax)(by)$ von Elementen aus G entspricht der Verknüpfung $(a,x) * (b,y)$ von Elementen aus $N \times H$.
- Das Neutralelement in $(N \times H, *)$ ist (e_G, e_G).
- Ist $(ax)(by) = a(xbx^{-1})xy = e$, so ist $y = x^{-1}$ und $b = \underbrace{x^{-1}a^{-1}x}_{\kappa_{x^{-1}}(a^{-1})}$, d.h. das Inverse von (a,x) ist $(x^{-1}a^{-1}x, x^{-1})$.

Beachte: $a\,\kappa_x(\kappa_{x^{-1}}(a^{-1})) = aa^{-1} = e$ $\dashv$

Def. Ist $G \cong (N \times H, *)$ mit

(i) $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$,

(ii) $|N \cap H| = 1$, $G = NH$,

so ist G das innere <u>semidirekte Produkt</u> von N mit H.

Wir schreiben $G = N \rtimes_\kappa H$.

Normalteiler $\rtimes$ ⊲ UG

κ Konjugation

Bsp. $T \cong (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$

Wir konstruieren nun aus zwei beliebigen Gruppen N, H ein äusseres semidirektes Produkt:

<u>Theorem 8.4</u> Seien N, H zwei Gruppen und sei

$$\alpha: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$
$$x \longmapsto \alpha_x : N \to N$$

ein Homomorphismus. Dann ist $G = (N \times H, *)$ mit

$$(a,x) *_\alpha (b,y) := (a\alpha_x(b), xy)$$

eine Gruppe.

<u>Beweis:</u>
- $*_\alpha$ ist eine binäre Operation auf $N \times H$ (folgt aus Def.)
- $*_\alpha$ ist assoziativ:

$$(\underbrace{(a_1,x_1) *_\alpha (a_2,x_2)}_{(a_1\alpha_{x_1}(a_2),\, x_1x_2)}) *_\alpha (a_3,x_3) = (a_1\alpha_{x_1}(a_2)\underbrace{\alpha_{x_1x_2}}_{\alpha_{x_1}(\alpha_{x_2}(a_3))}(a_3), x_1x_2x_3)$$

$$(a_1,x_1) *_\alpha (\underbrace{(a_2,x_2) *_\alpha (a_3,x_3)}_{(a_2\alpha_{x_2}(a_3),\, x_2x_3)}) = (a_1\underbrace{\alpha_{x_1}(a_2\alpha_{x_2}(a_3))}_{\alpha_{x_1}(a_2)\alpha_{x_1}(\alpha_{x_2}(a_3))}, x_1x_2x_3)$$

- (e_N, e_H) ist links-neutral:

$$(e_N,e_H) *_\alpha (a,x) = (e_N\underbrace{\alpha_{e_H}(a)}_{\text{? weil } \alpha \text{ Homom.}}, e_Hx) = (a,x)$$

- $(\alpha_{x^{-1}}(a^{-1}), x^{-1})$ ist links-inverses von (a,x):

$$(\alpha_{x^{-1}}(a^{-1}), x^{-1}) *_\alpha (a,x) = (\underbrace{\alpha_{x^{-1}}(a^{-1})\alpha_{x^{-1}}(a)}_{\alpha_{x^{-1}}(e_N) = e_N}, \underbrace{x^{-1}x}_{e_H}) = (e_N, e_H)$$

$\dashv$

<u>Def.</u> $G = (N \times H, *_\alpha)$ ist das äussere <u>semidirekte Produkt</u> von N und H und wird mit $N \rtimes_\alpha H$ bezeichnet.

<u>Faktum 8.5</u> Sind N, H Gruppen und ist $G = N \rtimes_\alpha H$, dann gilt für $N_0 := \{\langle a, e_H \rangle : a \in N\}$ und $H_0 := \{\langle e_N, x \rangle : x \in H\}$:
$$G \cong N_0 \rtimes_\kappa H_0 \quad (\kappa \text{ Konjugation})$$
d.h. G ist isomorph zum (inneren) semidirekten Produkt von N_0 und H_0 (mit $N_0 \trianglelefteq G$).

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus der Bemerkung nach Faktum 8.1. ⊣

[Anders ausgedrückt: Der Homom. $\alpha: H \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert die Verknüpfung auf dem äusseren semidirekten Produkt $G = N \rtimes_\alpha H$; G mit dieser Verknüpfung ist dann isom. zum inneren semidirekten Produkt $N_0 \rtimes_\kappa H_0$ von N_0 mit H_0.]

<u>Beispiel:</u> Gruppen der Ordnung 21.

- Ist G eine Gruppe mit $|G| = 21$, so hat G mit dem Sylow-Theorem einen Normalteiler $N \cong C_7$ und eine Untergruppe $H \cong C_3$. Weil $|N \cap H| = 1$ und $|NH| = |G|$, ist $G \cong N \rtimes_\alpha H$.
- Sei $N = (\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}\}, +) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $H = (\{x^0, x^1, x^2\}, \cdot) \cong C_3$.
- $\varphi \in \mathrm{Aut}(N)$ ist durch $\varphi(\bar{1})$ bestimmt.
- $\alpha: H \to \mathrm{Aut}(N)$ ist durch $\alpha(x)$ bestimmt.
- $\mathrm{ord}(x) = 3$, d.h. $\alpha(x^3) = \mathbb{1}$ und somit muss gelten $\mathrm{ord}(\alpha(x)) \mid 3$
  $\Rightarrow \mathrm{ord}(\alpha(x)) \in \{1, 3\}$.
- Sei $\varphi_k \in \mathrm{Aut}$ mit $\varphi_k(\bar{1}) = \bar{k}$, dann ist $\mathrm{ord}(\varphi_1) = 1$ (d.h. $\varphi_1 = \mathbb{1}$), $\mathrm{ord}(\varphi_2) = 3 = \mathrm{ord}(\varphi_4)$, $\mathrm{ord}(\varphi_3) = 6 = \mathrm{ord}(\varphi_5)$, $\mathrm{ord}(\varphi_6) = 2$.
- Für $\alpha: H \to \mathrm{Aut}(N)$ können wir also setzen:

$$\alpha_1(x) := \varphi_1 \Rightarrow G_1 = N \rtimes_{\alpha_1} H \cong N \times H \cong C_{21}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2(x) := \varphi_2 \Rightarrow G_2 \\ \alpha_4(x) := \varphi_4 \Rightarrow G_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{nicht abelsche Gruppen} \\ \text{(isomorph wegen } \alpha_2(x^2) = \alpha_4(x)) \end{array}$$

<u>Folgerung:</u> Bis auf Isomorphie gibt es genau zwei Gruppen der Ordnung 21, nämlich C_{21} (abelsch) und $C_7 \rtimes_{\alpha_2} C_3$.