Die Transzendenz von e

(aus Perron: Irrationalzahlen VI, § 48)

Zum Aufwärmen: e ist irrational

- Wäre $e = \frac{p}{q}$, so wäre $e^{-1} = \frac{q}{p}$, also auch rational.
- $e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{q}{p} \Rightarrow p! \cdot e^{-1} = q \cdot (p-1)! = m + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot p!}{n!}$

  wobei m eine ganze Zahl ist.
- Weil $q \cdot (p-1)!$ eine ganze Zahl ist, muss also auch

  $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot p!}{n!} = \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} + \frac{(-1)^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \ldots$ eine ganze Zahl sein,

  was aber nicht möglich ist (Reihe ist alternierend und $\frac{1}{p+1} > \frac{1}{(p+1)(p+2)} > \ldots$).

[Kettenbruch von $e = [2, \overline{1, 2\lambda, 1}]_{\lambda=1}^{\infty}$

$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots]$ mit NB $\frac{A_\nu}{B_\nu}$; $\forall n \exists \nu \, (b_{\nu+1} > B_\nu^n)$]

Liouvillesche Zahl, immer transzendent

Theorem. e ist transzendent

(jedes Polynom lässt sich so schreiben)

Beweis:
- Sei $P(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\gamma_\mu}{\mu!} x^\mu$ irgend ein Polynom, und sei

  $$P^*(x) := P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(m)}(x).$$

- Dann ist $P^*(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\gamma_\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{x^\mu}{\mu!} \right)$ (1) und somit $P^*(0) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu$ (2)

  $\left[0^\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \right]$

  und es gilt:

  Ist $Q(x)$ irgendein Polynom und $P(x) = Q(x+\beta)$,
  so ist auch $P^*(x) = Q^*(x+\beta)$ [folgt aus den Ableitungsregeln] (3)

- Wir ordnen nun dem Polynom $P(x)$ ein Polynom $P_*(x)$ wie folgt zu:

  $$P_*(x) := \sum_{\mu=0}^{m} \frac{|\gamma_\mu|}{\mu!} |x|^\mu$$

Beh. Für jedes Polynom $P(x)$ gilt:

$$|P^*(x) - e^x P^*(0)| \le |x| \cdot e^{|x|} \cdot P_*(x) \qquad (4)$$

Bew. Mit (2) ist $P^*(0) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu$, und multipliziert man diese Gleichung mit

$$e^x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!}$$

und subtrahiert sie dann von (1), so erhält man:

$$P^*(x) - e^x P^*(0) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{x^\mu}{\mu!} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!} \right) = -\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \cdot \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!}$$

Nun ist aber

$$\left| \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!} \right| = \frac{|x|^{\nu+1}}{\nu!} \cdot \left| \frac{1}{\nu+1} + \frac{x}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)} + \frac{x^2}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \dots \right| \le \frac{|x|^{\nu+1}}{\nu!} \cdot e^{|x|},$$

sodass sich aus der vorherigen Gleichung die folgende Abschätzung ergibt:

$$|P^*(x) - e^x P^*(0)| \le \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} |\gamma_\nu| \cdot \frac{|x|^\nu}{\nu!}}_{P_*(x)} \cdot |x| \cdot e^{|x|} = |x| \cdot e^{|x|} \cdot P_*(x).$$

Beh. ⊣

- Für einen Widerspruch nehmen wir nun an, dass e algebraisch ist, d.h. $$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^\nu = 0 \quad \text{für } a_0 \ne 0 \text{ und } a_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 0 \le i \le n. \quad (5)$$

- Wegen (5) ist für ein ~~beliebiges~~ Polynom $P(x)$,

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot P^*(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot P^*(\nu) - P^*(0) \cdot \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot e^\nu}_{=0} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \left(P^*(\nu) - e^\nu P^*(0)\right)$$

und mit (4) erhalten wir:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot P^*(\nu) \right| \le \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \cdot \nu \cdot e^\nu \cdot P_*(\nu) \le n \cdot e^n \cdot P_*(n) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \quad (6)$$

$P_*(\nu) \le P_*(n)$ für $\nu \le n$.

- Wir wählen für $P(x)$ speziell das Polynom

$$\tilde{P}(x) = \frac{x^{p-1} \cdot (x-1)^p \cdot (x-2)^p \cdot \ldots \cdot (x-n)^p}{(p-1)!} \quad (7)$$

wobei p eine sehr grosse Primzahl ist mit $p > n$, $p > |a_0|$. [p wird später bestimmt]

Schreiben wir $\tilde{P}(x)$ in der Form $\sum_{\mu} \frac{\gamma_\mu}{\mu!} x^\mu$ $\quad (0 \le \mu \le (n+1)p-1)$,

so ist
$$\tilde{P}_*(n) \le \frac{n^{p-1} \cdot (n+1)^p (n+2)^p \cdot \ldots \cdot (n+n)^p}{(p-1)!} = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^p \cdot \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$= \frac{((2n)!)^p}{(p-1)!} \cdot \frac{1}{(n-1)!^p \cdot n} \le \frac{((2n)!)^p}{(p-1)!}.$$

- Nun ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^{\nu+1}}{\nu!} = (2n)! \cdot e^{(2n)!}$, d.h. $\sum \%$ ist eine konvergente Reihe und somit wird $\frac{((2n)!)^p}{(p-1)!}$ für $p \to \infty$ beliebig klein, also wird auch $\tilde{P}_*(n)$ beliebig klein.

- Wähle p prim mit $p > n$, $p > |a_0|$, sodass $0 \le \tilde{P}_*(n) < \left(n \cdot e^n \cdot \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\right)^{-1}$.

  Aus (6) folgt dann
$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \tilde{P}^*(\nu) \right| < 1. \qquad (9)$$

- Setzen wir nun $\tilde{P}(x)$ in der Form $\sum_\mu \frac{\gamma_\mu}{\mu!} x^\mu$, so ist
$$\gamma_\mu = 0 \quad \text{für } \mu < p-1,$$
$$\gamma_{p-1} = ((-1)^n \cdot n!)^p,$$
$$\gamma_\mu = k \cdot p \quad \text{für } \mu \ge p \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

- Also ist $\gamma_\mu = k \cdot p$ für alle $\mu \ne p-1$ und $p \nmid \gamma_{p-1}$ weil $p > n$.

  Weiter gilt, wegen $0 < |a_0| < p$, auch $p \nmid a_0$. Somit ist mit (2)

  $[P^*(0) = \ldots]$
$$a_0 \cdot \tilde{P}^*(0) = a_0 \cdot \sum_\mu \gamma_\mu$$
  eine ganze, nicht durch p teilbare Zahl.

- Setzen wir nun das Polynom $\tilde{P}(x)$ für $\nu_0 = 1, 2, \ldots, n$ in die Form
$$\tilde{P}(x) = \sum_\mu \frac{\delta(\nu_0)_\mu}{\mu!} (x - \nu_0)^\mu =: \tilde{Q}_{\nu_0}(x - \nu_0),$$

$\nu \ne \nu_0: \quad (x-\nu) \longmapsto ((x-\nu_0) + (\nu_0 - \nu))$

so ist $\delta(\nu_0)_\mu = 0$ für $\mu < p$, und $p \mid \delta(\nu_0)_\mu$ für $\mu \geq p$.

- Mit (3) ist $\tilde{P}^*(x) = \tilde{Q}^*_{\nu_0}(x - \nu_0)$, und mit (2) ist

$$\tilde{P}^*(\nu_0) = \tilde{Q}^*_{\nu_0}(0) = \sum_{\mu} \delta(\nu_0)_\mu .$$

Somit ist $\tilde{P}^*(\nu_0)$ für jedes $\nu_0 \in \{1, \dots, n\}$ eine ganze, durch p teilbare Zahl.

- In der Gleichung (9)

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \tilde{P}^*(\nu) \right| < 1$$

sind alle Summanden $a_\nu \cdot \tilde{P}^*(\nu)$ mit Ausnahme von $\nu = 0$ ganze, durch p teilbare Zahlen, aber $p \nmid a_0 \cdot \tilde{P}^*(0)$.

- Die Summe ist daher eine ganze, nicht durch p teilbare Zahl (insbesondere $\neq 0$).

Somit ist $\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \tilde{P}^*(\nu) \right| \geq 1$ $\lightning$ zu (9)

$\dashv$