D–MATH

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-2604-00L

Nachname
XX

Vorname
XX

Legi-Nr.
XX-000-000

Prüfungs-Nr.
000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Alle Zufallsvariablen sind auf einem fixierten impliziten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ definiert.

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable X schreiben wir $\mathrm{E}(X)$ und für die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 1

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten (uiv) Zufallsvariablen, die Werte in $\{0, 1, -1\}$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = -1) = 1/3.$$

annehmen. Für die gesamte Aufgabe fixieren wir ein ganze Zahl $n \geq 1$. Wir untersuchen das Verhalten von S_n, definiert als

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1.A1 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{E}(X_1)$.

1.A2 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{E}(S_n)$.

1.A3 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{Var}(X_1)$.

1.A4 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{Var}(S_n)$.

1.A5 [2 Punkte] Beweise, dass $\mathrm{P}\left(|S_n| \geq \sqrt{n}\right) \leq 2/3$.

1.A6 [2 Punkte] Folgere, dass gilt

$$\mathrm{P}(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{3}.$$

1.A7 [2 Punkte] Beweise, dass $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass

$$\mathrm{P}(S_n = k) \geq \frac{1}{9\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 2

Sei $(U_i)_{i\geq 1}$ eine uiv. Folge von $\mathcal{U}([0,1])$ Zufallsvariablen. Für eine ganze Zahl $n \geq 1$, definieren wir

$$Z_n = \min(n \cdot U_1, \ldots, n \cdot U_n).$$

2.A1 [2 Punkte] Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Begründe, dass gilt

$$\mathrm{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^1 \int_0^1 \phi(2 \cdot \min(u,v))\, du\, dv.$$

2.A2 [2 Punkte] Folgere, dass gilt

$$\mathrm{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^2 \phi(z)(1 - z/2) dz.$$

2.A3 [1 Punkt] Was ist die Dichte von Z_2?

2.A4 [3 Punkte] Seien $n \geq 1$ und $t \geq 0$. Zeige, dass

$$\mathrm{P}(Z_n > t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < 0, \\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{wenn } t \in [0, n], \\ 0 & \text{wenn } t > n. \end{cases}$$

2.A5 [2 Punkte] Sei $n \geq 1$. Berechne $\mathrm{E}(Z_n)$.

2.A6 [2 Punkte] Sei $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$. Zeige, dass $(Z_n)_{n\geq 1}$ in Verteilung gegen Z konvergiert:

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z.$$

2.A7 [2 Punkte] Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

Aufgabe 3

Sei $\Theta = [0, \infty)$, und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen die durch Θ parametrisiert sind. Sei $n \geq 1$ und seien $X_1, \dots, X_n$ nicht-negative Zufallsvariablen, so dass unter P_θ gilt

- $X_1, \dots, X_n$ uiv. und
- X_i hat die Dichte gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\theta(x) = \exp(\theta - x) 1_{\theta \leq x}.$$

3.A1 [2 Punkte] Überprüfe, dass f_θ für jedes $\theta \in \Theta$ eine Dichte definiert.

3.A2 [3 Punkte] Beweise, dass der Maximum-Likelihood Schätzer durch $T = \min(X_1, \dots, X_n)$ gegeben ist.

3.A3 [1 Punkt] Sei $a \geq 0$. Berechne

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 > \theta + a).$$

3.A4 [2 Punkte] Zeige, dass $\forall a \in [0, \infty)$ gilt

$$\mathrm{P}_\theta(T > \theta + a) = \exp(-an).$$

3.A5 [2 Punkte] Ist T erwartungstreu?

3.A6 [1 Punkt] Zeige, dass

$$\mathrm{P}_\theta(\theta \leq T \leq \theta + a) = 1 - \exp(-an).$$

3.A7 [2 Punkte] Konstruiere ein 95% Konfidenzintervall für θ von der Form $[T - c/n, T]$, wobei $c > 0$ eine explizite Konstante ist, die bestimmt werden muss.

Aufgabe 4

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X definiert als

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < -1, \\ 1/3 & \text{wenn } -1 \leq a < 2, \\ 1/2 & \text{wenn } 2 \leq a < 3, \\ 3/4 & \text{wenn } 3 \leq a < 6, \\ 1 & \text{wenn } a \geq 6. \end{cases} \tag{1}$$

Erinnerung: $F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a)$.

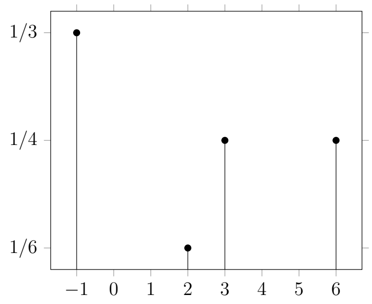
4.MC1 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

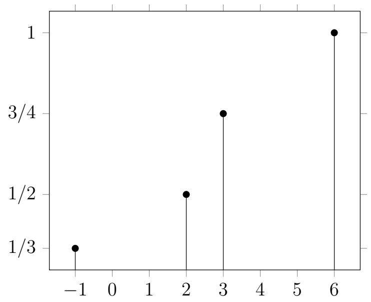
(A) X ist stetig
(B) X ist diskret
(C) X ist weder stetig noch diskret
(D) X^2 ist diskret
(E) X^2 ist stetig

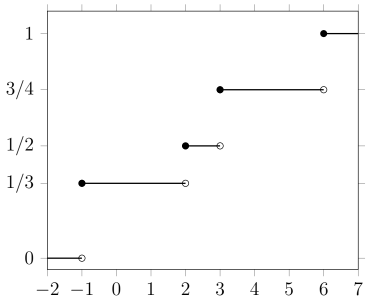
4.MC2 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

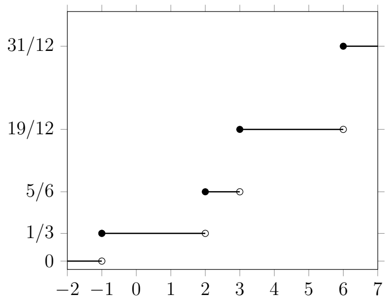
(A) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/2$
(B) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/3$
(C) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/6$
(D) $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(-1 < X < 3)$
(E) $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(X = -1)$

4.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Diagramme ist die Gewichtsfunktion von X?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) Keine der anderen Optionen.

4.MC4 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{E}[X]$?

(A) 1
(B) 9/4
(C) 35/12
(D) 43/12
(E) 5/2

Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 1, \\ 1 - 1/a^3 & \text{wenn } a \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

4.MC5 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{E}(Y)$?

(A) -1
(B) $1/2$
(C) $3/2$
(D) 2
(E) $7/2$

4.MC6 [2 Punkte] Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\mathrm{Var}(Y)$?

(A) $\mathrm{E}(Y^2)$
(B) $\mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^2\Big)$
(C) $\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2$
(D) -1
(E) 0

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X definiert als (1) und sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_Y definiert als (2). Wir nehmen an, dass X und Y unabhängig sind.

4.MC7 [2 Punkte] Welche(r) der folgenden Ausdrücke ist/sind gleich $\mathrm{P}(X + Y \leq 1)$?

(A) $\sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}, \\ x+y \leq 1}} \mathrm{P}(X = x, Y = y)$
(B) $\int_{\substack{x,y \in \mathbb{R}, \\ x+y \leq 1}} \mathrm{P}(X = x, Y = y) dx dy$
(C) $\mathrm{P}(X = -1) \cdot \mathrm{P}(Y \leq 2)$
(D) 0
(E) $7/24$

Aufgabe 5

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

5.MC1 [2 Punkte] Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, mit $\mathrm{P}(X = 1) = 1/2$ und $\mathrm{P}(Y = 1) = 1/3$. Welche der folgenden Zufallsvariablen hat/haben die gleiche Verteilung wie X?

(A) Y

(B) $X \cdot Y$

(C) $X + Y$

(D) $-X \cdot Y$

(E) $-X$

5.MC2 [2 Punkte] Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von uiv. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$ und $\mathrm{E}(X_1) = 1$. Für jede ganze Zahl $n \geq 1$, definieren wir

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 2X_n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

und

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) $\frac{S_n}{n}$ konvergiert nicht fast-sicher

(B) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}[S_n]}{n}$ fast-sicher

(C) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{2n} = 2$ fast-sicher

(D) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 3/2$ fast-sicher

(E) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 1$ fast-sicher

5.MC3 [2 Punkte]

Sei $\Theta = (0,1]$ und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen indiziert durch Θ. Betrachte die folgenden Hypothesen:

$$H_0 : \theta = 0.1,$$
$$H_1 : \theta = 0.01.$$

Seien $X_1, \ldots, X_{10}$ uiv. Geo(θ) Zufallsvariablen unter P_θ. Wir betrachten den Test

$$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \min(X_1, \ldots, X_{10}) < 5, \\ 1 & \text{wenn } \min(X_1, \ldots, X_{10}) \geq 5. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) Der Test hat das Niveau $(0.9)^{40}$ und Macht $(0.99)^{40}$.

(B) Der Test hat das Niveau $(0.99)^{40}$ und Macht $(0.9)^{40}$.

(C) Der Test hat das Niveau $(0.9)^{50}$ und Macht $(0.99)^{50}$.

(D) Der Test hat das Niveau $1 - (0.9)^{40}$ und Macht $(0.99)^{40}$.

(E) Wenn wir $(7, 10, 18, 11, 31, 89, 104, 11, 7, 202)$ beobachten, dann verwerfen wir H_0.

5.MC4 [2 Punkte] Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ uiv. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{E}(X_1^2) = 1$, und $\mathrm{E}(X_1^4) = 2$. Sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(B) $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(C) $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(D) $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(E) $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

Formelsammlung

Wir erinnern an die folgenden Definitionen und Aussagen. Diese müssen nicht zwingend benutzt werden.

Diskrete Zufallsvariablen

1. Sei $p \in (0,1]$. Eine Zufallsvariable (Z.V.) X heisst geometrisch mit Parameter p ($X \sim \mathrm{Geo}(p)$), falls
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$
2. Sei $p \in (0,1]$, $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.
$$\forall k \geq 1 \quad \mathrm{P}(X \geq k) = (1-p)^{k-1}.$$

Stetige Zufallsvariablen

1. Seien $a < b$. Eine stetige Z.V. heisst gleichverteilt auf $[a,b]$ ($X \sim \mathcal{U}([a,b])$), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & y \in [a,b] \\ 0 & y \notin [a,b] \end{cases}.$$
2. Sei $\lambda > 0$. Eine Z.V. X heisst Exponential mit Parameter λ ($X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch
$$f_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}.$$

Erwartungswert

1. Sei X eine Z.V., $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \int X d\mathrm{P}.$$
2. Sei $X \geq 0$ Z.V.
$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)\, dt.$$
3. Sei X eine diskrete Z.V. mit $X \in W$ f.s., $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{y \in W} y \cdot \mathrm{P}(X = y).$$
4. Sei X eine Z.V. mit Dichte f, $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\, dy.$$

Tchebyscheff Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, $m = \mathrm{E}(X)$.
$$\forall a \geq 0 \quad \mathrm{P}(|X - m| > a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Kriterium für f.s. Konvergenz

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$, X Zufallsvariablen. Falls
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon) < \infty,$$
dann gilt
$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad f.s.$$