D-MAVT / D-MATL | Lineare Algebra II | FS 2024
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Lernkontrolle

Aufgabe I

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

3. 0 ist ein Eigenwert von A.

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

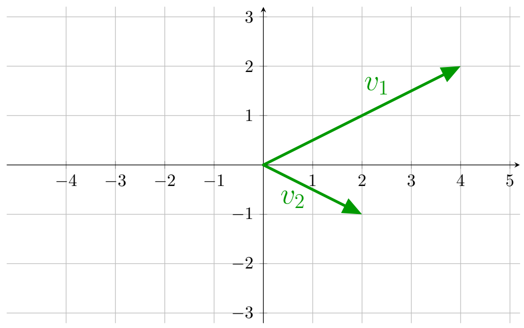
4. -1 ist ein Eigenwert von A.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

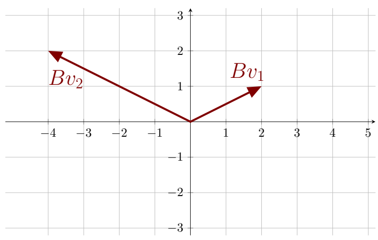
Aufgabe II

Die untenstehende Grafik zeigt zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 einer Matrix B.



Entscheiden Sie für jede der vier Grafiken unten, ob sie eine mögliche Darstellung von Bv_1 und Bv_2 beinhalten (Wahr) oder nicht (Falsch).

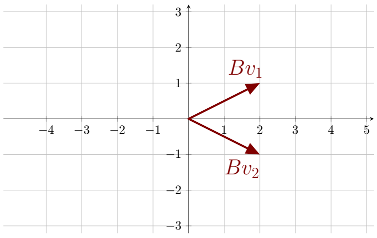
5.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

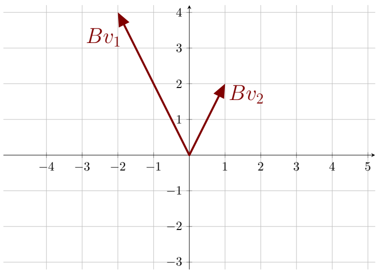
6.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

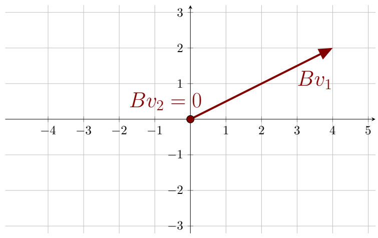
7.



(a) Wahr

√ (b) Falsch

8.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe III
Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Betrachten Sie zudem die Polynome $u(x) = x^3 - 2x + 1$, $v(x) = 2x^2$ und $w(x) = -11x^2$, sowie die Polynome $s(x)$ und $t(x)$ mit $\langle s, t \rangle = \frac{5}{3}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

9. w besitzt Länge 11.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

10. Es gilt $\langle -4s, 3t \rangle = -20$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

11. u und v sind orthogonal.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

12. Es gilt $\langle t, s\rangle = -\frac{5}{3}$.

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

Aufgabe IV

Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definieren (Wahr) oder nicht (Falsch).

Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

13. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

14. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

15. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_2 + x_2y_1$

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

16. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2$

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

Aufgabe V

Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\Pi_v \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

17. Es gilt $\Pi_{2v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

18. Es gilt $\Pi_v(v) = v$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

19. Es gilt $\Pi_v\left(\Pi_v\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) = 0$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

20. Es gilt $\Pi_v\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

√ (a) Wahr

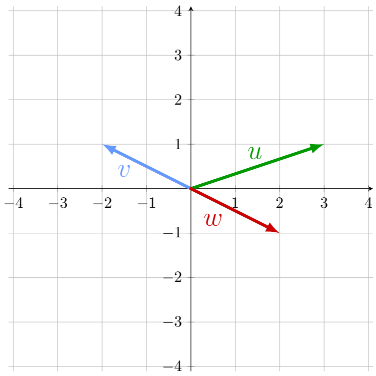
(b) Falsch

Aufgabe VI

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils drei Vektoren u, v und w im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Weiter beschreibt Π_v die orthogonale Projektion auf v.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob $w = \Pi_v(u)$ gilt (Wahr) oder nicht (Falsch).

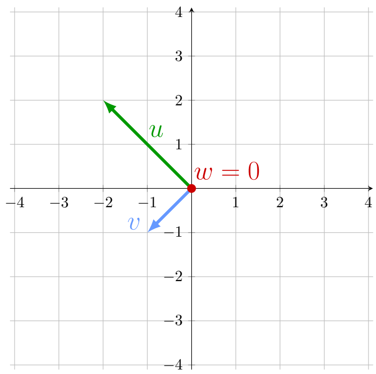
21.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

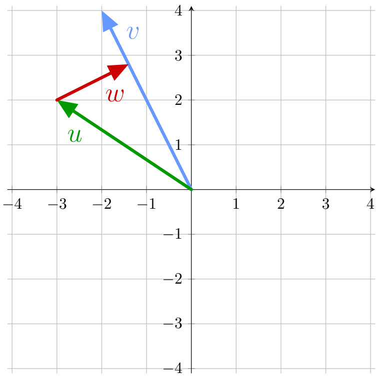
22.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

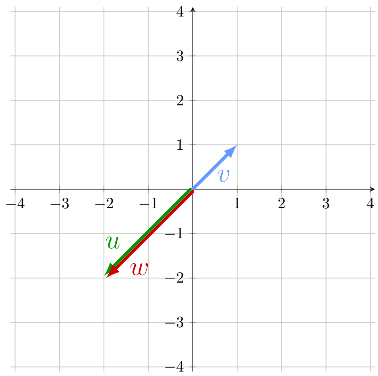
23.



(a) Wahr

√ (b) Falsch

24.



√ (a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VII

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

25. $v_1 \in \mathrm{Im}(A)$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

26. $v_1 \in \mathrm{Ker}(A)$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

27. $v_2 \in \mathrm{Im}(A)$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

28. $v_2 \in \mathrm{Ker}(A)$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VIII

Betrachten Sie beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

29. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Im}(C)) < 3$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

30. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Im}(A)) < 3$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

31. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Ker}(C)) > 0$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

32. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Ker}(A)) > 0$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe IX

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diagonalisieren die Matrix A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $A = TDT^{-1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

33. D ist eine der folgenden Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

34. Es gilt $A^{2024} = TD^{2024}T^{-1}$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

35. Die Spaltenvektoren von T bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

36. Die Spaltenvektoren von T sind orthogonal.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Aufgabe X

Betrachten Sie die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

37. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

38. Alle Eigenwerte von C sind reell.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

39. C ist diagonalisierbar mithilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

40. Es existiert eine Eigenbasis zu C.

√ (a) Wahr

(b) Falsch