

Lösungen Serie 9

1. Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A .

✓ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Lösung: Löst x die Normalgleichungen $A^\top Ax = A^\top c$, so folgt $A^\top r = A^\top (Ax - c) = 0$, d.h. r steht senkrecht auf den Spalten von A und somit senkrecht auf dem ganzen Bildraum von A .

2. Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

(a) Wahr.

✓ (b) Falsch.

Lösung: Die Lösung des Ausgleichsproblems $Ax - c = r$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist eindeutig genau dann, wenn $\text{Rang}(A) = n$. Dennoch, da der minimale Residuenvektor eindeutig ist, gilt für zwei Lösungen $x^{(1)}, x^{(2)}$ eines Ausgleichsproblems natürlich: $Ax^{(1)} - c = r = Ax^{(2)} - c$, also $Ax^{(1)} = Ax^{(2)}$.

3. Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

✓ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Lösung: Ja, denn $Ax - c = 0$ (oder $Ax = c$) ist lösbar genau dann, wenn c im Spaltenraum von A liegt. Das Gleichungssystem ist also im "klassischen" Sinne lösbar und die Ausgleichsrechnung überflüssig (dennoch besteht keine Gefahr die Methode der Ausgleichsrechnung zu benutzen, sie liefert dieselben ("klassischen") Lösungen), mit minimalem Residuenvektor $r = 0$.

4. Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000 \frac{\text{U}}{\text{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

1. Messung: $X_1 = 1; Y_1 = 1$
2. Messung: $X_2 = 2; Y_2 = 2$
3. Messung: $X_3 = 4; Y_3 = 3$.

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

- (a) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.
- (b) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.
- (c) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.
- ✓ (d) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

Lösung: Die Fehlergleichungen lauten

$$\begin{aligned} a + b - 1 &= r_1 \\ 2a + b - 2 &= r_2 \\ 4a + b - 3 &= r_3, \end{aligned}$$

also ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir müssen die Normalgleichungen $A^\top A x = A^\top c$ lösen. Mit $A^\top A = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $A^\top c = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist dies $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$, und die Lösungen sind $a = \frac{9}{14}, b = \frac{1}{2}$.

5. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\ x_2 - 3 &= r_2 \\ x_2 - 4 &= r_3. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

✓ (a) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Lösung: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wählen wir die Givens-Rotation $Q^\top = U_{23}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten $Q^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$. Mit $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ wird $d = Q^\top c = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Schliesslich löst man $R_0 x = d_0$ durch Rückwärtseinsetzen und erhält $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dabei sind R_0 und d_0 die ersten zwei Zeilen von R und d .