

## Serie 3

---

1. Die Norm  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|$  wird von einem Skalarprodukt induziert.

- (a) richtig
- (b) falsch

2.  $\langle a, b \rangle := ab$  ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

3. Für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

4. Die Folge von Funktionen  $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$  auf  $[-1, 1]$  konvergiert bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^1}$  gegen die Funktion  $f(x) \equiv 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

5. Die Folge von Funktionen  $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$  auf  $[-1, 1]$  konvergiert bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  gegen die Funktion  $f(x) \equiv 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

6. Der Betrag  $|\cdot|$  ist eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

7. Sei  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3})$ . Wir definieren  $\langle x, y \rangle := x^\top D y$  für  $x, y \in V$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in  $V$  ein Skalarprodukt definiert.

b) Wie sieht die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm  $\| \cdot \|$  aus?

c) Berechnen Sie die Norm von  $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

8. Wir betrachten die Funktionen  $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$  und  $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$  für  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \geq 1$  und  $\alpha_n, \beta_m > 0$  im Vektorraum  $V = C^0([0, 2\pi])$ , den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

ausstatten.

a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.

b) Wie sind  $\alpha_n$  und  $\beta_m$  zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

**Hinweis:** Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos(u - v) - \cos(u + v))$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos(u - v) + \cos(u + v))$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin(u - v) + \sin(u + v))$$

9.

a) Sei  $\| \cdot \|$  eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf  $C^0([a, b])$  die Axiome einer Norm erfüllt.

c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = x$  steht.