

# Aufgaben und Lösungsvorschlag

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

(B) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.MC2 [1 Punkt] Welche der folgenden Mengen von  $\mathbb{R}^3$  ist **kein** Unterraum?

(A) **FALSE:**  $\text{Ker}(A)$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

(B) **TRUE:**  $\{(x, 0, y) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}$ .

(C) **FALSE:**  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = z\}$ .

1.MC3 [1 Punkt] Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

(A) **TRUE:** Jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

(B) **FALSE:** Wenn  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist, dann ist auch  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A$ .

(C) **FALSE:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m < n$ , dann ist das Gleichungssystem  $Ax = b$  für alle  $b \in \mathbb{R}^m$  lösbar.

**1.MC4 [1 Punkt]** Seien  $S_1 \subset S_2$  zwei nicht leere Teilmengen eines Vektorraums  $V$ . Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

- (A) **FALSE:** Falls  $S_1$  eine Basis von  $V$  ist und  $S_1 \neq S_2$ , dann ist auch  $S_2$  eine Basis von  $V$ .
- (B) **TRUE:** Falls die Vektoren in  $S_1$  ein Erzeugendensystem von  $V$  sind, dann trifft das auch auf die Vektoren in  $S_2$  zu.
- (C) **FALSE:** Falls die Vektoren in  $S_1$  linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren in  $S_2$  linear unabhängig.

**1.MC5 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + y = -3 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

- (A) **FALSE:** Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von  $a$  unendlich viele Lösungen.
- (B) **FALSE:**  $a = 2$ .
- (C) **TRUE:**  $a \in \{-1, 0\}$ .

**1.MC6 [1 Punkt]** Falls  $\det \begin{pmatrix} 2g & d+2a & a \\ 2h & e+2b & b \\ 2i & f+2c & c \end{pmatrix} = 10$ . Dann ist  $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \dots$

*Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften der Determinante, um die eine Matrix in die andere umzuformen.*

- (A) **FALSE:** 5.
- (B) **FALSE:** -2.
- (C) **TRUE:** -5.

**1.MC7 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}^T$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T$  in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren ist linear unabhängig von  $\{v_1, v_2\}$ ?

- (A) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1/2 \end{pmatrix}^T$ .
- (B) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ .
- (C) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y''' - 4y'' + 2y' - y = 0. \quad (*)$$

Übersetzen Sie (\*) in ein homogenes System  $Y' = AY$  von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Welche der folgenden Matrizen entspricht  $A$ ?

(A) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

(B) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

(C) **FALSE:** Es ist nicht möglich (\*) als homogenes System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuschreiben.

**1.MC9 [1 Punkt]** Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 \\ y_2''' = y_1 + y_2 + y_2' \end{cases}$$

(A) **TRUE:** 5.

(B) **FALSE:** 3.

(C) **FALSE:** 2.

**1.MC10 [1 Punkt]** Betrachten Sie die quadratische Form  $q(x_1, x_2) = \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{1}{5}x_2^2$ . Der durch  $q(x_1, x_2) = -2$  in der reellen Ebene gegebene Kegelschnitt ist...

(A) **FALSE:** eine Ellipse.

(B) **TRUE:** die leere Menge.

(C) **FALSE:** eine Hyperbel.

**1.MC11 [1 Punkt]** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -12 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A$ ?

(A) **FALSE:** 1, 2, 3.

(B) **FALSE:** -1, -2, 3.

(C) **TRUE:** 1, 2, 5.

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$ . Betrachten Sie die Abbildung  $f : V \rightarrow V$ ,  $p(x) \mapsto p''(x) - xp'(x) + p(0)$ . Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- (A) **FALSE:**  $f$  ist keine lineare Abbildung.
- (B) **FALSE:** Die Eigenwerte von  $f$  sind 1,  $-1$  und 2.
- (C) **TRUE:** Die inverse Abbildung von  $f$  bildet das Polynom  $x^2$  ab auf das Polynom  $-\frac{1}{2}x^2 + 1$ .

**1.MC13 [1 Punkt]** Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 1$ . Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f : p \mapsto \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(x) - p'(x) dx$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen  $\{1, x\}$  von  $V$  und  $\{1\}$  von  $\mathbb{R}$  ist ...

- (A) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (B) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ .
- (C) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Welcher der folgenden ist ein Eigenraum der Matrix  $A$ ?

- (A) **FALSE:**  $\text{Span}((0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T)$ .
- (B) **TRUE:**  $\text{Span}((1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T)$ .
- (C) **FALSE:**  $\text{Span}((0, 1, 0)^T)$ .

**1.MC15 [1 Punkt]** Für welche Werte von  $t \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3t & 2 & 1 \\ 0 & 2 - 6t & 2 \\ 0 & 0 & 1 + 3t \end{pmatrix}$$

invertierbar?

- (A) **FALSE:**  $t \in \mathbb{R}$ .
- (B) **FALSE:**  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .
- (C) **TRUE:**  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3, 0, 1/3\}$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Seien  $A, B$  invertierbare  $2 \times 2$  Matrizen mit  $\det A = 5$  und  $\det(B) = 6$ . Dann ist die Determinante von  $\frac{1}{3}AA^{-1}B^TABA^{-1}$  gleich ...

- (A) **FALSE:**  $5^2$
- (B) **FALSE:** 12
- (C) **TRUE:** 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so dass  $AA^T = A^T A$ . Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **richtig**?

- (A) **FALSE:** Die Eigenwerte von  $A$  und  $A^T A$  stimmen überein.
- (B) **FALSE:** Es gilt  $A^T = A$ .
- (C) **TRUE:** Wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A^T A$  ist, dann ist  $Av$  ebenfalls ein Eigenvektor von  $A^T A$ .

**1.MC18 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{pmatrix}$  eine  $5 \times 7$  Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_7$ . Es gelte  $v_1 = 2(v_3 + v_6)$ ,  $2v_4 = -v_2$  und  $v_5 = v_1 + v_2$ . Dann gilt im Allgemeinen...

- (A) **TRUE:**  $\text{rank}(A) \leq 4$  und  $\dim \ker(A) \geq 3$ .
- (B) **FALSE:**  $\text{rank}(A) \leq 3$  und  $\dim \ker(A) \geq 4$ .
- (C) **FALSE:**  $\text{rank}(A) \geq 4$  und  $\dim \ker(A) \leq 3$ .

**1.MC19 [1 Punkt]**  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  bilden die Basis eines zweidimensionalen Unterraums

von  $\mathbb{R}^3$ . Wie lauten die Koordinaten von  $v = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  bezüglich  $\{v_1, v_2\}$ ?

- (A) **FALSE:**  $(-4, 5)^T$ .
- (B) **TRUE:**  $(4, -5)^T$ .
- (C) **FALSE:**  $v$  wird nicht von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannt.

**1.MC20 [1 Punkt]** Für welche der folgenden Matrizen gilt: Es existiert eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}AT$  diagonal ist?

(A) **FALSE:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(B) **TRUE:**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

(C) **FALSE:**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1.MC21 [1 Punkt]** Seien  $A, B$  zwei quadratische Matrizen der gleichen Grösse. Welche Aussage gilt im Allgemeinen **nicht**?

(A) **FALSE:**  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

(B) **TRUE:**  $(AB)^T = A^T B^T$ .

(C) **FALSE:**  $(A^T)^T = A$ .

**1.MC22 [1 Punkt]** Welche der folgenden Formeln definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$ ? Dabei sei  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$  und  $v = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$ .

(A) **FALSE:**  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 - 2u_2 v_1 + u_3 v_3$ .

(B) **FALSE:**  $\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 - u_2 v_2 + 4u_3 v_3$ .

(C) **TRUE:**  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 3u_2 v_2 + 2u_3 v_1 + 2u_1 v_3 + u_3 v_3$ .

**1.MC23 [1 Punkt]** Der Vektorraum  $C([-1, 1])$  wird ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Dann ist die orthogonale Projektion des Vektors  $\sin(\pi x)$  auf den Unterraum  $U = \text{Span}(1, x)$  gegeben durch:

(A) **FALSE:**  $\frac{1}{2}$ .

(B) **TRUE:**  $\frac{3}{\pi}x$ .

(C) **FALSE:**  $\frac{1}{2\pi}(1 + x)$ .

**1.MC24 [1 Punkt]** Gegeben sei der Vektorraum  $V = \mathcal{P}_2$  der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$ . Wir betrachten die lineare Abbildung  $F : V \rightarrow V$ ,  $p(x) \mapsto p''(1)x^2 + p'(1)x + 2p(x)$ . In einer geeigneten Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , ist die Darstellungsmatrix von  $F$  diagonal, nämlich  $[F]_{\mathcal{C}} = \dots$

(A) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(B) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC25 [1 Punkt]** Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt, dass  $A = TDT^{-1}$ . Dann ist  $A^5 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dots$

(A) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 3 \cdot 4^5 + 5^5 \\ 4^5 + 2 \cdot 5^5 \end{pmatrix}$

(B) **FALSE:**  $\begin{pmatrix} 2^5 \\ 3^5 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:**  $\begin{pmatrix} 4^5 + 5^5 \\ 2 \cdot 4^5 + 5^5 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

## Textaufgaben für HS24

26. [5 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von  $A$ .(b) [2 Punkte] Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  für  $b = (3 \ -2 \ 5)^T$ .

Lösung:

(a) Wir bestimmen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Wir lösen zuerst  $Ly = b$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_2 &= 7 \\ y_3 &= 7 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dann lösen wir  $Rx = y$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -6 \\ x_3 &= 7 \end{aligned} \end{aligned}$$

27. [10 Punkte] Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y'' = \beta y' + \alpha y \quad (**)$$

(a) [1 Punkt] Schreiben Sie (\*\*) als lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form  $Y' = AY$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .



- (b) [5 Punkte] Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von  $A$ . Für welche Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  ist  $A$  nicht diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenvektoren von  $A$ , falls  $\alpha = 4$  und  $\beta = 1$ .
- (d) [2 Punkte] Bestimmen Sie für  $\alpha = 4$  und  $\beta = 1$  die allgemeine Lösung des Systems  $Y' = AY$  und von  $(**)$ .

**Lösung:**

(a) We define  $y_0 = y$  and  $y_1 = y'$ . Then

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

(b) We compute

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ \alpha & \beta - X \end{pmatrix} = -X(\beta - X) - \alpha = X^2 - \beta X - \alpha.$$

Since  $\Delta = \beta^2 + 4\alpha$ , we find the eigenvalues

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

We are sure that the 2 eigenvalues will be distinct, and hence that the matrix will be diagonalizable, as soon as  $\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$ , i.e. as soon as

$$\Delta \neq 0 \iff \beta^2 \neq -4\alpha.$$

On the other hand, if  $\Delta$  vanishes, we easily check that  $\lambda_1 = \lambda_2$  has algebraic multiplicity 2 but geometric multiplicity 1.

(c) Seien  $\alpha = 4$  und  $\beta = 1$ . Dann ist  $\beta^2 = 1 \neq -16 = -4\alpha$ . Deshalb sind die Eigenwerte von  $A$  gleich

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

We solve

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ 4x + y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ 4x + \lambda_1 x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1^2 x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 x - 4x - \lambda_1 x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(\lambda_1^2 - 4 - \lambda_1) &= 0,\end{aligned}$$

which always holds since  $\lambda_1$  is a solution to  $\chi_A(X)$ . It follows that

$$\text{Eig}_A(\lambda_1) = \text{Span}((1 \quad \lambda_1))^T.$$

Similarly, we find

$$\text{Eig}_A(\lambda_2) = \text{Span}((1 \quad \lambda_2))^T.$$

(c) We therefore have

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

We want to solve

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} Y$$

We set  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} Y = Z$  and solve  $Z' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} Z$ . We find

$$\begin{pmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

We conclude that

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

28. [10 Punkte] Betrachten Sie die reelle quadratische Form

$$Q(x, y) = 13x^2 - 8xy + 7y^2.$$

(a) [1 Punkt] Schreiben Sie die quadratische Form mithilfe einer Matrix  $B$  in der Form

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) [5 Punkte] Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix  $T$  so dass  $T^T B T$  diagonal ist. Zeichnen Sie im  $(x, y)$ -Koordinatensystem die Hauptachsen von  $Q$ .

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie  $\max_{\|v\|=1} Q(v)$  und  $\min_{\|v\|=1} Q(v)$ . Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) [2 Punkte] Skizzieren Sie im  $(x, y)$ -Koordinatensystem (cf. Antwortheft) den Kegelschnitt, der durch die Gleichung

$$Q(x, y) = 45$$

gegeben ist. Notieren Sie die Längen der Achsen des Kegelschnitts in der Skizze.

## Lösung:

(a) We have

$$B = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) The characteristic polynomial of  $B$  is given by  $X^2 - 20X + 75$ . Hence,

$$\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 5.$$

Additionally, we compute the eigenvectors of  $B$  and find

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

We use Gram-Schmidt on the set  $\{v_1, v_2\}$ . We first normalize  $v_1$  and obtain

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Since  $u_1 \perp v_2$  we just need to normalize  $v_2$ . We get

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

It follows that

$$A = TDT^T,$$

where

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

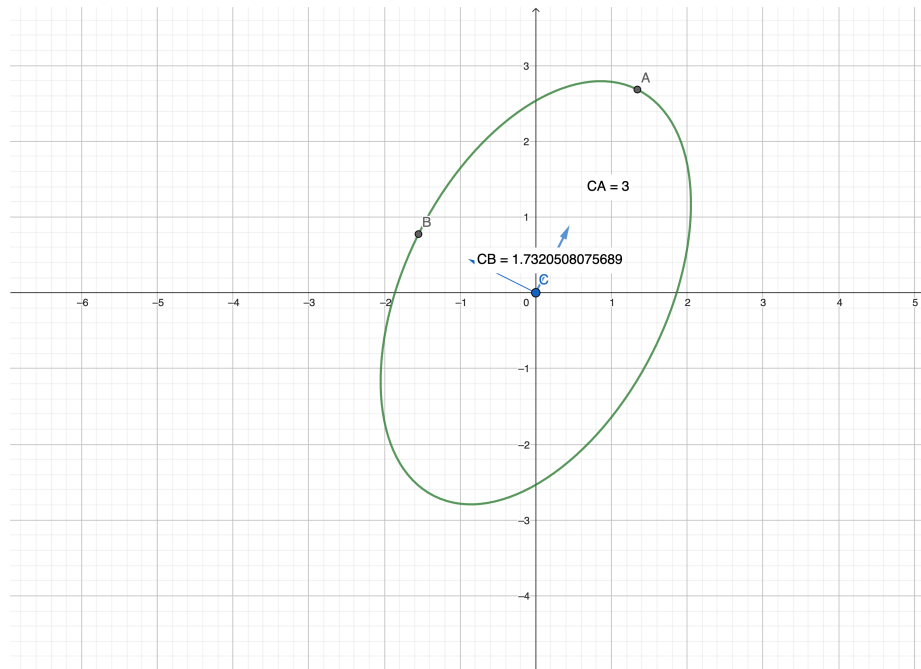
(c) We have  $Q_B(v) = v^T Bv = (Tv)^T D(Tv) = Q_D(Tv)$ . Moreover,  $\|v\| = 1 \Leftrightarrow \|Tv\| = 1$  since  $T$  is orthogonal. Hence,

$$\begin{aligned} \max_{\|v\|=1} Q(v) &= \max_{\|w\|=1} Q_D(w) \\ &= \max_{\|w\|=1} \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 \\ &= \max \{\lambda_1, \lambda_2\} = 15. \end{aligned}$$

The last equality holds since  $w_1^2 + w_2^2 = 1$  and the max is attained. Similarly,

$$\min_{\|v\|=1} Q_B(v) = \min \{\lambda_1, \lambda_2\} = 5.$$

(d)



The lengths of the axes are  $\sqrt{45}/\sqrt{15} = \sqrt{3}$  and  $\sqrt{45}/\sqrt{5} = 3$ .