

Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/9 \\ -1/9 & 1/3 & -1/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}$.

(B) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$.

(C) **TRUE:** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Entweder Ausschlussverfahren, indem man einige Einträge des Produktes von A mit den vorgeschlagenen Matrizen berechnet, oder das Gauss-Jordan-Verfahren auf A anwenden.

1.MC2 [1 Punkt] Welche der folgenden Mengen von \mathbb{R}^3 ist **kein** Untervektorraum?

(A) **FALSE:** $\{s(1, 0, 0) + t(0, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

(B) **FALSE:** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 5y + z = 0\}$.

(C) **TRUE:** $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). $(1, 1, 1)$ gehört zur Menge, $2 \cdot (1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ jedoch nicht.

1.MC3 [1 Punkt] Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

(A) **FALSE:** Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zu einander.

(B) **FALSE:** Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

(C) **TRUE:** Die Inverse einer symmetrischen invertierbaren Matrix ist symmetrisch.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C): Es gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

1.MC4 [1 Punkt] Seien $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A) **FALSE:** $B^T A$.
- (B) **TRUE:** BA^T .
- (C) **FALSE:** $A + B$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B).

1.MC5 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 9 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

- (A) **TRUE:** Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von a unendlich viele Lösungen.
- (B) **FALSE:** $a = \sqrt{6}$.
- (C) **FALSE:** $a \neq \pm\sqrt{6}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Das System kann unendlich viele Lösungen haben, nur falls $\det A = 0$ wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2 - 5) \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $a^2 - 6$ also muss $a = \pm\sqrt{6}$ gelten. Durch Einsetzen sehen wir, dass

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y + z = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

gelten muss, was aber inkonsistent ist. Also gibt es keinen Wert von a so dass das System unendlich viele Lösungen besitzt.

Alternative Lösung: Gauss-Algorithmus.

1.MC6 [1 Punkt] Falls $\det \begin{pmatrix} 3 & d & a+2d \\ 3 & e & b+2e \\ 15 & 5f & 5c+10f \end{pmatrix} = 60$. Dann ist $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \dots$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften der Determinante, um die eine Matrix in die andere umzuformen.

- (A) **TRUE:** -4 .
(B) **FALSE:** 4 .
(C) **FALSE:** -1 .

Lösung:

Um die erste Matrix in die zweite umzuformen kann man folgendes machen: die 3. Zeile durch 5 dividieren, dann die zweite Spalte von der dritten Spalte subtrahieren. Dann muss noch die erste Spalte durch 3 geteilt werden. Dann noch die Matrix transponieren und die erste und dritte Zeile umtauschen. Die Determinante wird somit durch $5 \cdot 3$ dividiert und mit -1 multipliziert. $60/15 \cdot (-1) = -4$.

1.MC7 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$. Welche Aussage ist korrekt?

- (A) **TRUE:** Die Dimension des Bildes von AB ist höchstens 2.
(B) **FALSE:** Falls der Kern von BA nur aus dem Nullvektor besteht, so gilt es auch für den Kern von B .
(C) **FALSE:** Falls A den Rang 2 hat, so hat auch BA den Rang 2.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Es gilt $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ und $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, also $AB : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Das Bild von B ist höchstens 2-dimensional also muss dasselbe für AB gelten.

(B) gilt nicht: Man betrachte z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(C) gilt nicht: B kann die Nullmatrix sein.

1.MC8 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y''' - 2y'' + y' = 0. \quad (*)$$

Welche Dimension hat der Raum $\{y : y \text{ löst } (*) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0\}$?

- (A) **FALSE:** 0.
(B) **TRUE:** 1.
(C) **FALSE:** 2.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B) gemäss einem Satz aus der Vorlesung.

1.MC9 [1 Punkt] Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + y_3 \\ y_3'' = y_1 \\ y_2' = y_1' + y_3'. \end{cases}$$

- (A) **FALSE:** 2.
(B) **FALSE:** 3.
(C) **TRUE:** 5.

Lösung:

Das gegebene Differentialgleichungssystem kann durch die Substitution

$$Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_3 \\ y_3' \\ y_2 \end{pmatrix}$$

auf das System 1. Ordnung $Z' = AZ$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden. Nach einer Satz aus der Vorlesung hat der Lösungsraum dieses System die Dimension 5. Daher hat auch der Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystem die Dimension 5.

1.MC10 [1 Punkt] Betrachten Sie die quadratische Form $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Der durch $q(x_1, x_2) = 8$ gegebene Kegelschnitt ist...

- (A) **FALSE:** eine Ellipse.
(B) **TRUE:** eine Hyperbel.
(C) **FALSE:** eine Parabel.

Lösung:

Die zugehörige Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -1 und 3 also ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

1.MC11 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^{-1}$?

- (A) **TRUE:** $-1/3, 1, -2$.
(B) **FALSE:** $1/3, 1, -2$.
(C) **FALSE:** $-1/3, -1, -2$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A), denn λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $-1/\lambda$ Eigenwert von $-A^{-1}$ ist. Die Matrix A ist eine Dreiecksmatrix mit $3, -1, 1/2$ auf der Diagonale, also mit Eigenwerten $3, -1, 1/2$.

1.MC12 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Betrachten Sie die Abbildung $f : V \rightarrow V$, $p(x) \mapsto p(x) - p'(x) - 2p(0)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?
Hinweis: Betrachten Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$.

- (A) **FALSE:** f ist keine lineare Abbildung.
(B) **TRUE:** Die Eigenwerte von f sind 1 und -1 .
(C) **FALSE:** Die Inverse Abbildung von f bildet x^2 zu $x^2 + 2x - 1$.

Lösung:

Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ ist:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind offensichtlich 1 und -1 .
Die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und sie bildet x^2 zu $x^2 + 2x - 2$.

1.MC13 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f : p \mapsto \int_{-1}^1 p(x) dx$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{1, x, x^2, x^3\}$ von V und $\{1\}$ von \mathbb{R} ist ...

(A) **TRUE:** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

(B) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

(C) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Die Bilder der Basisvektoren sind

$$f(1) = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$f(x) = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$f(x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3$$

$$f(x^3) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

1.MC14 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) **FALSE:** $(-2, 1, 2)^T$.

(B) **FALSE:** $(2, 5, 1)^T$.

(C) **TRUE:** $(-1, 0, 1)^T$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C), denn

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(A) und (B) schliesst man aus, indem man einige Einträge des Produktes von A mit den vorgeschlagenen Vektoren berechnet.

1.MC15 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix A . Welche Aussage ist **nicht** korrekt?

- (A) **FALSE:** Falls der Kern von f nur aus dem Nullvektor besteht, so ist $m \geq n$.
- (B) **TRUE:** Falls $m < n$, dann ist $\text{im}(f) = \mathbb{R}^m$.
- (C) **FALSE:** Falls $\text{rank } A = n$, dann sind die Spalten von A linear unabhängig.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B), da diese Aussage falsch ist. Betrachte zum Beispiel die triviale Abbildung $f : x \mapsto 0$.

(A) und (C) sind wahr. Für (A) aus dem Dimensionssatz gilt $n = \dim \ker(f) + \dim \text{im}(f) = \dim \text{im}(f) \leq m$. Für (C): Der Rang ist die Dimension vom Spaltenraum der Matrix A , die n Spalten hat.

1.MC16 [1 Punkt] Seien A, B invertierbare 2×2 Matrizen mit $\det A = 27$ und $B^3 = A^T$. Dann ist die Determinante von $2B^{-1}AB^TA^{-1}B$ gleich ...

- (A) **TRUE:** 12
- (B) **FALSE:** 3
- (C) **FALSE:** 27^3

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Es gilt

$$\det(2B^{-1}AB^TA^{-1}B) = 2^2 \det(B^{-1}AB^TA^{-1}B) = 4 \det(AB^TA^{-1}) = 4 \det(B^T) = 4 \det(B),$$

und $27 = \det(A) = \det(A^T) = \det(B^3) = \det(B)^3$. Also $\det(B) = 3$.

1.MC17 [1 Punkt] Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ diagonalisierbare Matrizen mit den Eigenwerten 1 und 2. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **falsch**?

- (A) **FALSE:** Es existiert eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $TBT^{-1} = A$.
- (B) **TRUE:** Es gilt $AB = BA$.
- (C) **FALSE:** Es gilt $\text{Spur}(A - B) = 0$.

Lösung:

Die richtige Lösung ist (B).

(A) ist korrekt: es existieren $S, Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = YBY^{-1}$. Somit gilt mit $T = S^{-1}Y$, dass $TBT^{-1} = A$.

Gegenbeispiel für (B): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) ist korrekt, denn $\text{Spur}(A - B) = \text{Spur}(A) - \text{Spur}(B) = (1 + 2) - (1 + 2) = 0$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei $A = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5)$ eine 4×5 Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_5 . Es gelte $v_2 = v_1 + v_3$ und $2v_4 = v_1 - v_2$. Dann gilt...

- (A) **TRUE:** $\text{rank}(A) \leq 3$ und $\dim \ker A \geq 2$.
(B) **FALSE:** $\text{rank}(A) \geq 2$ und $\dim \ker A \leq 3$.
(C) **FALSE:** $\text{rank}(A) \geq 3$ und $\dim \ker A \leq 2$.

Lösung:

Die richtige Lösung ist (A). Aus $v_2 = v_1 + v_3$ und $2v_4 = v_1 - v_2$, folgt, dass $\text{rank}(A) \leq 3$. Mit der Dimensionformel schliessen wir

$$5 = \dim \ker A + \text{rank}(A) \leq \dim \ker A + 3$$

also $\dim \ker A \geq 5 - 3 = 2$.

1.MC19 [1 Punkt] $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden die Basis eines zweidimensionalen Unterraums

von \mathbb{R}^3 . Wie lauten die Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{v_1, v_2\}$?

- (A) **FALSE:** $(3, 1)^T$.
(B) **TRUE:** $(2, -1)^T$.
(C) **FALSE:** v wird nicht von v_1 und v_2 aufgespannt.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B).

1.MC20 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit reellen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

- (A) **TRUE:** A ist diagonalisierbar.
(B) **FALSE:** A ist symmetrisch.
(C) **FALSE:** A ist invertierbar.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A): Die zwei Eigenvektoren bilden eine Basis von \mathbb{R}^2 und A ist bezüglich dieser Basis diagonal.

1.MC21 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) **FALSE:** Alle Eigenräume von A sind 1-dimensional.
- (B) **FALSE:** A hat n verschiedene Eigenwerte.
- (C) **TRUE:** Es existiert eine Basis für \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren von A besteht.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C).

1.MC22 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der reellen Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) **FALSE:** $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) **TRUE:** $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
- (C) **FALSE:** $\langle p, q \rangle = \int_{-2}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^3 p(x)q(x)dx$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B). Es ist leicht zu sehen, dass die Ausdrücke in (A) und (C) linear, symmetrisch und positiv definit sind. Der Ausdruck in (B) ist nicht positiv definit, z.B für $p = x(x-1)$ gilt $\langle p, p \rangle_{(B)} = 0$.

1.MC23 [1 Punkt] Sei P_1 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 1 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Die Orthogonalprojektion von x auf den Vektor 1 bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) **FALSE:** $\frac{1}{2}$.
- (B) **FALSE:** x .
- (C) **TRUE:** 0.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Es gilt $\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x \, dx = 0$ und somit:

$$\pi_1(x) = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = 0.$$

1.MC24 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ eine Matrix mit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \dots$$

(A) **FALSE:** $\begin{pmatrix} -1, 2, 2 \end{pmatrix}^T$

(B) **TRUE:** $\begin{pmatrix} -2, 2, 3 \end{pmatrix}^T$

(C) **FALSE:** Diese Informationen genügen nicht, um $A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B).

Es gilt $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, also aus Linearität von A folgt:

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.MC25 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr?

(A) **TRUE:** Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.

(B) **FALSE:** Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp (v_1 - v_2)$.

(C) **FALSE:** Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A) aus der Linearität des Skalarprodukt. (B) ist falsch: falls $v_1 \perp v_2$, dann $\langle v_1, v_1 - v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$. (C) ist falsch: betrachte zB $v_2 = -v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben für FS24

26. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b & a-b & a+b \\ b & -b & b \\ 2b-a & a-b & b \end{pmatrix}$$

mit zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) [2 Punkte] Für welche reellen Werte a, b ist A *nicht* invertierbar?
- (b) [4 Punkte] Finden Sie eine Basis für das Bild von A in Abhängigkeit der Parameter a und b .
- (c) [2 Punkte] Seien $a = 1$ und $b = 0$. Begründen Sie, warum A dann diagonalisierbar ist.
- (d) [2 Punkte] Seien $a = 2$ und $b = 1$. Finden Sie eine Basis von Kern A .

Lösung:

(a) Die Determinante von A ist $-a^2b + 2ab^2$. Es gilt $\det A = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = 2b$.

(b) Falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $a \neq 2b$ dann ist A invertierbar und die Spalten von A bilden eine Basis für das Bild.

Falls $a = 0$, $b \neq 0$ dann ist $A = \begin{pmatrix} b & -b & b \\ b & -b & b \\ 2b & -b & b \end{pmatrix}$ und die ersten zwei linear unabhängiger

Spalten von A bilden eine Basis.

Falls $a = 0 = b$ dann ist A die Nullmatrix.

Falls $a \neq 0$, $b = 0$, dann ist $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$ und z.B. die erste und dritte Spalte bilden eine Basis.

Falls $a = 2b \neq 0$ dann ist $A = \begin{pmatrix} b & b & 3b \\ b & -b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$. Mit dem Gauss-Verfahren bekommt man

$\begin{pmatrix} b & b & 3b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$. Das Bild hat deshalb Dimension 2. Je zwei linear unabhängige Spalten der Matrix ergeben eine Basis des Bildes.

(c) Die Matrix A hat die drei verschiedenen Eigenwerte $0, i, -i$ und ist deshalb diagonalisierbar.

(d) Es gilt $a = 2 = 2b$ und $\ker A$ hat Dimension 1 (aus (b)). Wie in Teilaufgabe (b) bekommt man mit dem Gauss-Verfahren die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und so wird $\ker A$ von $(-2, -1, 1)^T$ gespannt.

27. Sei V der von den Funktionen $\{1, x, e^x\}$ aufgespannte reelle Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{span}\{1, e^x\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0).$$

- (a) [3 Punkte] Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
 (b) [2 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B} := \{1, e^x\}$ von U an, um eine Orthonormalbasis $\tilde{\mathcal{B}}$ von U zu erhalten.
 (c) [3 Punkte] Vervollständigen Sie $\tilde{\mathcal{B}}$ zu einer Orthonormalbasis $\tilde{\mathcal{C}}$ von V .
 (d) [2 Punkte] Sei $\pi : V \rightarrow V$ die Orthogonalprojektion auf U . Sei $\mathcal{C} := \{1, x, e^x\}$. Was ist die Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ von π bezüglich der Basis \mathcal{C} ?

Lösung:

- (a) The students need to check

- Linearität in der erste Variablen: $\forall v_1, v_2, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\ \langle \alpha v_1, w \rangle &= \alpha \langle v_1, w \rangle.\end{aligned}$$

- Linearität in der zweite Variablen: $\forall v_1, v_2, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle w, v_1 + v_2 \rangle &= \langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle \\ \langle w, \alpha v_1 \rangle &= \alpha \langle w, v_1 \rangle.\end{aligned}$$

- Symmetrie:

$$\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle.$$

- Positivität:

$$\forall v \in V \setminus \{0_V\} : \langle v, v \rangle > 0.$$

- (b) Es gilt $\langle 1, 1 \rangle = 1$ und $\langle e^x, 1 \rangle = 1 \cdot e^0 + 0 + 0 = 1$. Nach Gram-Schmidt ist $e^x - \langle e^x, 1 \rangle = e^x - 1$ orthogonal zu 1. Wir müssen der noch normieren. Es gilt

$$\langle e^x - 1, e^x - 1 \rangle = 2$$

also ist $\tilde{\mathcal{B}} := \{1, (e^x - 1)/\sqrt{2}\}$ eine Orthonormalbasis von U .

- (c) Um $\tilde{\mathcal{B}}$ zu einer ONB von V zu ergänzen, muss man einen Vektor in $V \setminus U$ auswählen und das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden. Wir wählen x . Nach Gram-Schmidt ist

$$v := x - \langle x, 1 \rangle - \langle x, (e^x - 1)/\sqrt{2} \rangle (e^x - 1)/\sqrt{2}$$

ein Vektor, dessen Normierung die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ zu einer ONB von V ergänzt. Es gilt $\langle 1, x \rangle = 0$ und $\langle x, e^x - 1 \rangle = 1$, also

$$v = x - (e^x - 1)/2.$$

Es gilt $\langle v, v \rangle = 1/2$, also ist $\tilde{v} = \sqrt{2}v$ normiert und die Basis

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{1, (e^x - 1)/\sqrt{2}, \sqrt{2}(x - (e^x - 1)/2)\}$$

ist eine ONB von V .

(d) Es gilt

$$[\pi]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nämlich, in den Spalten stehen die Bilder der Basisvektore. Damit sind die 1. und 3. Spalte trivial, und die zweite folgt aus (c).

28. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörige Eigenvektoren von A .
- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems $y' = Ay$ für die Matrix A aus (a).

Lösung:

- (a) Die Matrix A ist $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 2$. Die zugehörige Eigenräume sind $E_5 = \text{span}\{(1, 2)^T\}$ und $E_2 = \text{span}\{(-1, 1)^T\}$.

- (b) Nach (a) ist die allgemeine Lösung des Systems

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.