

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AB**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-756**

*Prüfungs-Nr.*

**001**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AB**

*Vorname*

**TH**

*Legi-Nr.*

**XX-918-478**

*Prüfungs-Nr.*

**002**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AC**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-918-082**

*Prüfungs-Nr.*

**003**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AE**

**PA**

**XX-914-030**

*Prüfungs-Nr.*

**004**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AE**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-946-156**

*Prüfungs-Nr.*

**005**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AF**

*Vorname*

**MI**

*Legi-Nr.*

**XX-940-474**

*Prüfungs-Nr.*

**006**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AG JO**

**XX-932-974**

*Prüfungs-Nr.*

**007**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AI**

*Vorname*

**AD**

*Legi-Nr.*

**XX-924-328**

*Prüfungs-Nr.*

**008**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AK**

**JU**

**XX-940-482**

*Prüfungs-Nr.*

**009**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AL**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-920-482**

*Prüfungs-Nr.*

**010**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AL JE**

**XX-932-975**

*Prüfungs-Nr.*

**011**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AMJO**

**XX-950-604**

*Prüfungs-Nr.*

**012**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**A M A N**

**XX-915-665**

*Prüfungs-Nr.*

**013**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AN**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-925-961**

*Prüfungs-Nr.*

**014**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1 + 2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AN EL**

**XX-919-336**

*Prüfungs-Nr.*

**015**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AN**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-937-610**

*Prüfungs-Nr.*

**016**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AN IL**

**XX-927-793**

*Prüfungs-Nr.*

**017**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AN**

**SA**

**XX-945-572**

*Prüfungs-Nr.*

**018**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AR DA**

**XX-914-890**

*Prüfungs-Nr.*

**019**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AR**

**AU**

**XX-922-413**

*Prüfungs-Nr.*

**020**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AR FA**

**XX-921-167**

*Prüfungs-Nr.*

**021**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AT**

*Vorname*

**HA**

*Legi-Nr.*

**XX-917-653**

*Prüfungs-Nr.*

**022**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AT**

*Vorname*

**EL**

*Legi-Nr.*

**XX-920-763**

*Prüfungs-Nr.*

**023**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**AU JU**

**XX-931-117**

*Prüfungs-Nr.*

**024**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**AZ**

*Vorname*

**GI**

*Legi-Nr.*

**XX-925-383**

*Prüfungs-Nr.*

**025**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A D A**

**XX-918-593**

*Prüfungs-Nr.*

**026**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A S E**

**XX-921-860**

*Prüfungs-Nr.*

**027**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A L A**

**XX-933-360**

*Prüfungs-Nr.*

**028**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A M A**

**XX-930-671**

*Prüfungs-Nr.*

**029**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BA ÁL**

**XX-957-071**

*Prüfungs-Nr.*

**030**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**B A**

*Vorname*

**N I**

*Legi-Nr.*

**XX-919-807**

*Prüfungs-Nr.*

**031**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BA RO**

**XX-916-944**

*Prüfungs-Nr.*

**032**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BA JA**

**XX-918-388**

*Prüfungs-Nr.*

**033**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A S T**

**XX-932-099**

*Prüfungs-Nr.*

**034**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BA**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-917-421**

*Prüfungs-Nr.*

**035**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**B A**

*Vorname*

**S I**

*Legi-Nr.*

**XX-935-639**

*Prüfungs-Nr.*

**036**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**B A**

*Vorname*

**T I**

*Legi-Nr.*

**XX-915-961**

*Prüfungs-Nr.*

**037**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BA HA**

**XX-952-451**

*Prüfungs-Nr.*

**038**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**B A S A**

**XX-922-158**

*Prüfungs-Nr.*

**039**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BA ST**

**XX-934-368**

*Prüfungs-Nr.*

**040**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-946-164**

*Prüfungs-Nr.*

**041**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BE LE**

**XX-950-472**

*Prüfungs-Nr.*

**042**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-924-534**

*Prüfungs-Nr.*

**043**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**CH**

*Legi-Nr.*

**XX-923-817**

*Prüfungs-Nr.*

**044**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-926-349**

*Prüfungs-Nr.*

**045**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BE**

**ER**

**XX-917-439**

*Prüfungs-Nr.*

**046**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BE**

**FR**

**XX-936-455**

*Prüfungs-Nr.*

**047**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**EM**

*Legi-Nr.*

**XX-914-659**

*Prüfungs-Nr.*

**048**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BE LO**

**XX-919-146**

*Prüfungs-Nr.*

**049**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-919-153**

*Prüfungs-Nr.*

**050**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BE**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-927-529**

*Prüfungs-Nr.*

**051**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-555**

*Prüfungs-Nr.*

**052**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BI**

*Vorname*

**LU**

*Legi-Nr.*

**XX-929-830**

*Prüfungs-Nr.*

**053**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BI**

*Vorname*

**LI**

*Legi-Nr.*

**XX-926-174**

*Prüfungs-Nr.*

**054**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-934-921**

*Prüfungs-Nr.*

**055**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-924-021**

*Prüfungs-Nr.*

**056**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-924-427**

*Prüfungs-Nr.*

**057**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**YO**

*Legi-Nr.*

**XX-935-101**

*Prüfungs-Nr.*

**058**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**VA**

*Legi-Nr.*

**XX-916-407**

*Prüfungs-Nr.*

**059**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**TI**

*Legi-Nr.*

**XX-918-791**

*Prüfungs-Nr.*

**060**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BL**

*Vorname*

**TI**

*Legi-Nr.*

**XX-931-950**

*Prüfungs-Nr.*

**061**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BO**

**GU**

**XX-930-960**

*Prüfungs-Nr.*

**062**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BO**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-951-784**

*Prüfungs-Nr.*

**063**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BO**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-926-133**

*Prüfungs-Nr.*

**064**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BO**

**MA**

**XX-934-491**

*Prüfungs-Nr.*

**065**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BO JÜ**

**XX-952-303**

*Prüfungs-Nr.*

**066**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BR**

**JA**

**XX-933-790**

*Prüfungs-Nr.*

**067**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BR LU**

**XX-954-663**

*Prüfungs-Nr.*

**068**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BR**

**BO**

**XX-919-675**

*Prüfungs-Nr.*

**069**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1 + 2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BR LE**

**XX-917-116**

*Prüfungs-Nr.*

**070**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BU**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-939-511**

*Prüfungs-Nr.*

**071**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BÜ**

**MA**

**XX-939-979**

*Prüfungs-Nr.*

**072**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BU**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-509**

*Prüfungs-Nr.*

**073**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BÜ**

**BE**

**XX-923-262**

*Prüfungs-Nr.*

**074**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**BÜ JO**

**XX-557-530**

*Prüfungs-Nr.*

**075**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**BU**

*Vorname*

**SE**

*Legi-Nr.*

**XX-923-601**

*Prüfungs-Nr.*

**076**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**C A**

**M A**

**XX-926-836**

*Prüfungs-Nr.*

**077**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CA**

*Vorname*

**ZH**

*Legi-Nr.*

**XX-951-792**

*Prüfungs-Nr.*

**078**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**C A D A**

**XX-945-795**

*Prüfungs-Nr.*

**079**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**C A**

**M A**

**XX-950-448**

*Prüfungs-Nr.*

**080**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**C A**

*Vorname*

**T H**

*Legi-Nr.*

**XX-925-499**

*Prüfungs-Nr.*

**081**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**C A D E**

**XX-925-507**

*Prüfungs-Nr.*

**082**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CE**

*Vorname*

**SE**

*Legi-Nr.*

**XX-927-669**

*Prüfungs-Nr.*

**083**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CE**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-918-171**

*Prüfungs-Nr.*

**084**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CE**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-954-671**

*Prüfungs-Nr.*

**085**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**CH**

**PA**

**XX-915-573**

*Prüfungs-Nr.*

**086**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CH**

*Vorname*

**CL**

*Legi-Nr.*

**XX-939-417**

*Prüfungs-Nr.*

**087**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CH**

*Vorname*

**TA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-939**

*Prüfungs-Nr.*

**088**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CO**

*Vorname*

**FE**

*Legi-Nr.*

**XX-951-800**

*Prüfungs-Nr.*

**089**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$

(C)  $(1, 1, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$

(B) 2

(C)  $-2a^2$

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CO**

*Vorname*

**DI**

*Legi-Nr.*

**XX-933-337**

*Prüfungs-Nr.*

**090**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CS**

*Vorname*

**IS**

*Legi-Nr.*

**XX-947-733**

*Prüfungs-Nr.*

**091**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**CU**

*Vorname*

**BE**

*Legi-Nr.*

**XX-951-495**

*Prüfungs-Nr.*

**092**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**D A**

**M A**

**XX-930-036**

*Prüfungs-Nr.*

**093**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**D A L U**

**XX-946-172**

*Prüfungs-Nr.*

**094**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DA HA**

**XX-921-076**

*Prüfungs-Nr.*

**095**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DA FA**

**XX-917-512**

*Prüfungs-Nr.*

**096**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE PI**

**XX-920-490**

*Prüfungs-Nr.*

**097**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE LI**

**XX-921-084**

*Prüfungs-Nr.*

**098**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE**

**DA**

**XX-956-064**

*Prüfungs-Nr.*

**099**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE FR**

**XX-953-070**

*Prüfungs-Nr.*

**100**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE TI**

**XX-920-548**

*Prüfungs-Nr.*

**101**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DE NI**

**XX-926-448**

*Prüfungs-Nr.*

**102**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**DI**

*Vorname*

**DI**

*Legi-Nr.*

**XX-954-465**

*Prüfungs-Nr.*

**103**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**DI**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-930-748**

*Prüfungs-Nr.*

**104**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DMAL**

**XX-920-771**

*Prüfungs-Nr.*

**105**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DN MA**

**XX-922-090**

*Prüfungs-Nr.*

**106**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DO GL**

**XX-951-503**

*Prüfungs-Nr.*

**107**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DO TO**

**XX-951-818**

*Prüfungs-Nr.*

**108**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**DO**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-927-933**

*Prüfungs-Nr.*

**109**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DO**

**BR**

**XX-932-123**

*Prüfungs-Nr.*

**110**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\text{im } f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\text{im } f = \text{im } g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DR JE**

**XX-923-586**

*Prüfungs-Nr.*

**111**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DU KA**

**XX-945-530**

*Prüfungs-Nr.*

**112**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DU SI**

**XX-920-459**

*Prüfungs-Nr.*

**113**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DU EL**

**XX-934-517**

*Prüfungs-Nr.*

**114**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DÜ**

**AL**

**XX-914-253**

*Prüfungs-Nr.*

**115**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**DU LO**

**XX-951-826**

*Prüfungs-Nr.*

**116**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EB**

*Vorname*

**HE**

*Legi-Nr.*

**XX-918-049**

*Prüfungs-Nr.*

**117**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EB**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-946-032**

*Prüfungs-Nr.*

**118**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EG**

*Vorname*

**PA**

*Legi-Nr.*

**XX-915-525**

*Prüfungs-Nr.*

**119**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**EH**

**MA**

**XX-920-672**

*Prüfungs-Nr.*

**120**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EI**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-926-829**

*Prüfungs-Nr.*

**121**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EI**

*Vorname*

**CL**

*Legi-Nr.*

**XX-934-046**

*Prüfungs-Nr.*

**122**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**EI**

**JÉ**

**XX-920-375**

*Prüfungs-Nr.*

**123**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EI**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-949-283**

*Prüfungs-Nr.*

**124**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EL**

*Vorname*

**LA**

*Legi-Nr.*

**XX-935-589**

*Prüfungs-Nr.*

**125**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EL**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-922-546**

*Prüfungs-Nr.*

**126**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EL**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-922-793**

*Prüfungs-Nr.*

**127**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EN**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-925-409**

*Prüfungs-Nr.*

**128**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EN**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-914-378**

*Prüfungs-Nr.*

**129**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**EP**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-920-342**

*Prüfungs-Nr.*

**130**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ER**

**LE**

**XX-455-985**

*Prüfungs-Nr.*

**131**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ER**

**FA**

**XX-933-618**

*Prüfungs-Nr.*

**132**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ER**

**GI**

**XX-936-223**

*Prüfungs-Nr.*

**133**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ES**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-922-843**

*Prüfungs-Nr.*

**134**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FA**

*Vorname*

**AR**

*Legi-Nr.*

**XX-735-528**

*Prüfungs-Nr.*

**135**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FE**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-950-455**

*Prüfungs-Nr.*

**136**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FE**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-932-800**

*Prüfungs-Nr.*

**137**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FE**

*Vorname*

**CI**

*Legi-Nr.*

**XX-922-587**

*Prüfungs-Nr.*

**138**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FI**

*Vorname*

**LI**

*Legi-Nr.*

**XX-934-764**

*Prüfungs-Nr.*

**139**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-915-581**

*Prüfungs-Nr.*

**140**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FI**

*Vorname*

**RO**

*Legi-Nr.*

**XX-915-425**

*Prüfungs-Nr.*

**141**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FL**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-934-525**

*Prüfungs-Nr.*

**142**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FO**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-932-173**

*Prüfungs-Nr.*

**143**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FO**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-941-109**

*Prüfungs-Nr.*

**144**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-915-185**

*Prüfungs-Nr.*

**145**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**FR**

**LA**

**XX-932-446**

*Prüfungs-Nr.*

**146**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**NA**

*Legi-Nr.*

**XX-921-747**

*Prüfungs-Nr.*

**147**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(1, 0, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$

(B)  $-2(1 + 2a)$

(C)  $2$

(D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$

(B)  $2$

(C)  $4$

(D)  $3$

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-928-068**

*Prüfungs-Nr.*

**148**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**OS**

*Legi-Nr.*

**XX-939-771**

*Prüfungs-Nr.*

**149**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**LO**

*Legi-Nr.*

**XX-915-821**

*Prüfungs-Nr.*

**150**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**FI**

*Legi-Nr.*

**XX-951-834**

*Prüfungs-Nr.*

**151**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FR**

*Vorname*

**GI**

*Legi-Nr.*

**XX-925-820**

*Prüfungs-Nr.*

**152**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**FU**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-918-271**

*Prüfungs-Nr.*

**153**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**FU**

**GR**

**XX-915-011**

*Prüfungs-Nr.*

**154**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**G A M O**

**XX-934-772**

*Prüfungs-Nr.*

**155**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GA JO**

**XX-941-612**

*Prüfungs-Nr.*

**156**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**G A**

*Vorname*

**G A**

*Legi-Nr.*

**XX-918-130**

*Prüfungs-Nr.*

**157**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**G A T O**

**XX-932-503**

*Prüfungs-Nr.*

**158**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GE**

**DO**

**XX-923-643**

*Prüfungs-Nr.*

**159**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GE LO**

**XX-929-772**

*Prüfungs-Nr.*

**160**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GE**

**DA**

**XX-951-511**

*Prüfungs-Nr.*

**161**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GE**

**PA**

**XX-119-926**

*Prüfungs-Nr.*

**162**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GE**

**EM**

**XX-920-789**

*Prüfungs-Nr.*

**163**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**GI**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-919-658**

*Prüfungs-Nr.*

**164**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**GI**

*Vorname*

**JI**

*Legi-Nr.*

**XX-915-979**

*Prüfungs-Nr.*

**165**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GMIIV**

**XX-930-531**

*Prüfungs-Nr.*

**166**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**GO**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-947-659**

*Prüfungs-Nr.*

**167**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**GO**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-950-463**

*Prüfungs-Nr.*

**168**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GÖ GI**

**XX-939-524**

*Prüfungs-Nr.*

**169**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GÖ**

**MA**

**XX-939-987**

*Prüfungs-Nr.*

**170**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**GO**

*Vorname*

**AB**

*Legi-Nr.*

**XX-930-524**

*Prüfungs-Nr.*

**171**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR**

**AN**

**XX-935-581**

*Prüfungs-Nr.*

**172**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR CO**

**XX-915-060**

*Prüfungs-Nr.*

**173**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR**

**TA**

**XX-914-394**

*Prüfungs-Nr.*

**174**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR JA**

**XX-931-803**

*Prüfungs-Nr.*

**175**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR JO**

**XX-914-279**

*Prüfungs-Nr.*

**176**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR LI**

**XX-748-462**

*Prüfungs-Nr.*

**177**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR DA**

**XX-925-234**

*Prüfungs-Nr.*

**178**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GR**

**AN**

**XX-924-526**

*Prüfungs-Nr.*

**179**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GU CL**

**XX-918-528**

*Prüfungs-Nr.*

**180**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GU TI**

**XX-931-661**

*Prüfungs-Nr.*

**181**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GÜ MI**

**XX-951-529**

*Prüfungs-Nr.*

**182**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GU**

**CH**

**XX-952-469**

*Prüfungs-Nr.*

**183**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GU**

**LA**

**XX-926-661**

*Prüfungs-Nr.*

**184**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**GY**

**MI**

**XX-919-286**

*Prüfungs-Nr.*

**185**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**H A S E**

**XX-943-522**

*Prüfungs-Nr.*

**186**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HA JA**

**XX-915-418**

*Prüfungs-Nr.*

**187**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**H A P A**

**XX-914-964**

*Prüfungs-Nr.*

**188**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HA**

*Vorname*

**GI**

*Legi-Nr.*

**XX-935-647**

*Prüfungs-Nr.*

**189**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**H A**

*Vorname*

**S I**

*Legi-Nr.*

**XX-952-329**

*Prüfungs-Nr.*

**190**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**H A K A**

**XX-920-277**

*Prüfungs-Nr.*

**191**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HA FE**

**XX-915-987**

*Prüfungs-Nr.*

**192**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HA ZE**

**XX-933-451**

*Prüfungs-Nr.*

**193**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HÄ LI**

**XX-930-754**

*Prüfungs-Nr.*

**194**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HE**

**AL**

**XX-701-800**

*Prüfungs-Nr.*

**195**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HE**

**LU**

**XX-916-522**

*Prüfungs-Nr.*

**196**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HE**

**TI**

**XX-924-039**

*Prüfungs-Nr.*

**197**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HE SÖ**

**XX-927-057**

*Prüfungs-Nr.*

**198**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HI**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-326-473**

*Prüfungs-Nr.*

**199**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HII**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-920-797**

*Prüfungs-Nr.*

**200**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**KH**

*Legi-Nr.*

**XX-940-175**

*Prüfungs-Nr.*

**201**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HO**

**MA**

**XX-934-541**

*Prüfungs-Nr.*

**202**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-925-010**

*Prüfungs-Nr.*

**203**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-916-597**

*Prüfungs-Nr.*

**204**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-935-408**

*Prüfungs-Nr.*

**205**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-927-065**

*Prüfungs-Nr.*

**206**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-924-369**

*Prüfungs-Nr.*

**207**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-917-686**

*Prüfungs-Nr.*

**208**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-952-337**

*Prüfungs-Nr.*

**209**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HO**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-915-623**

*Prüfungs-Nr.*

**210**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HU**

**MA**

**XX-923-015**

*Prüfungs-Nr.*

**211**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HU**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-931-596**

*Prüfungs-Nr.*

**212**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HU**

**MA**

**XX-949-291**

*Prüfungs-Nr.*

**213**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HU RA**

**XX-919-378**

*Prüfungs-Nr.*

**214**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**HU**

*Vorname*

**AD**

*Legi-Nr.*

**XX-934-558**

*Prüfungs-Nr.*

**215**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**HU PE**

**XX-927-412**

*Prüfungs-Nr.*

**216**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**IA**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-955-959**

*Prüfungs-Nr.*

**217**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**IL**

*Vorname*

**DU**

*Legi-Nr.*

**XX-923-710**

*Prüfungs-Nr.*

**218**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**IL**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-307**

*Prüfungs-Nr.*

**219**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**IN**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-919-526**

*Prüfungs-Nr.*

**220**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JA**

*Vorname*

**ZA**

*Legi-Nr.*

**XX-945-621**

*Prüfungs-Nr.*

**221**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JA**

*Vorname*

**IA**

*Legi-Nr.*

**XX-927-073**

*Prüfungs-Nr.*

**222**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JA**

*Vorname*

**CO**

*Legi-Nr.*

**XX-923-171**

*Prüfungs-Nr.*

**223**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**JÄ**

**BA**

**XX-924-609**

*Prüfungs-Nr.*

**224**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JA**

*Vorname*

**SV**

*Legi-Nr.*

**XX-952-304**

*Prüfungs-Nr.*

**225**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JE**

*Vorname*

**RO**

*Legi-Nr.*

**XX-917-836**

*Prüfungs-Nr.*

**226**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JI**

*Vorname*

**RU**

*Legi-Nr.*

**XX-954-689**

*Prüfungs-Nr.*

**227**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JO**

*Vorname*

**PA**

*Legi-Nr.*

**XX-938-989**

*Prüfungs-Nr.*

**228**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JO**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-727-624**

*Prüfungs-Nr.*

**229**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JU**

*Vorname*

**EM**

*Legi-Nr.*

**XX-933-345**

*Prüfungs-Nr.*

**230**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**JU**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-923-214**

*Prüfungs-Nr.*

**231**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÄNI**

**XX-949-309**

*Prüfungs-Nr.*

**232**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A L I**

**XX-938-725**

*Prüfungs-Nr.*

**233**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A K E**

**XX-917-108**

*Prüfungs-Nr.*

**234**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÄDA**

**XX-922-066**

*Prüfungs-Nr.*

**235**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**K A**

*Vorname*

**V I**

*Legi-Nr.*

**XX-925-037**

*Prüfungs-Nr.*

**236**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A A R**

**XX-927-199**

*Prüfungs-Nr.*

**237**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A D O**

**XX-915-417**

*Prüfungs-Nr.*

**238**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A L E**

**XX-926-679**

*Prüfungs-Nr.*

**239**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A B A**

**XX-923-023**

*Prüfungs-Nr.*

**240**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K A L E**

**XX-951-537**

*Prüfungs-Nr.*

**241**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KE**

**HO**

**XX-937-776**

*Prüfungs-Nr.*

**242**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KE TI**

**XX-918-833**

*Prüfungs-Nr.*

**243**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KI**

*Vorname*

**PH**

*Legi-Nr.*

**XX-923-791**

*Prüfungs-Nr.*

**244**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-919-534**

*Prüfungs-Nr.*

**245**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KI**

*Vorname*

**VA**

*Legi-Nr.*

**XX-916-209**

*Prüfungs-Nr.*

**246**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-922-652**

*Prüfungs-Nr.*

**247**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KL**

**LA**

**XX-914-766**

*Prüfungs-Nr.*

**248**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**FA**

*Legi-Nr.*

**XX-924-600**

*Prüfungs-Nr.*

**249**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-935-472**

*Prüfungs-Nr.*

**250**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\text{im } f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\text{im } f = \text{im } g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-939-946**

*Prüfungs-Nr.*

**251**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-931-786**

*Prüfungs-Nr.*

**252**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-844**

*Prüfungs-Nr.*

**253**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-951-545**

*Prüfungs-Nr.*

**254**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KL**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-548**

*Prüfungs-Nr.*

**255**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KN ZO**

**XX-925-523**

*Prüfungs-Nr.*

**256**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÖ RA**

**XX-918-940**

*Prüfungs-Nr.*

**257**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**K O N O**

**XX-951-842**

*Prüfungs-Nr.*

**258**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KO JO**

**XX-934-566**

*Prüfungs-Nr.*

**259**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**KO**

*Vorname*

**BE**

*Legi-Nr.*

**XX-935-283**

*Prüfungs-Nr.*

**260**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KR FE**

**XX-919-716**

*Prüfungs-Nr.*

**261**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KR AR**

**XX-930-044**

*Prüfungs-Nr.*

**262**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KR**

**HA**

**XX-932-321**

*Prüfungs-Nr.*

**263**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KR GI**

**XX-919-724**

*Prüfungs-Nr.*

**264**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KR**

**PA**

**XX-919-401**

*Prüfungs-Nr.*

**265**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÜ**

**MA**

**XX-928-923**

*Prüfungs-Nr.*

**266**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KU**

**MA**

**XX-934-574**

*Prüfungs-Nr.*

**267**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KU EN**

**XX-929-070**

*Prüfungs-Nr.*

**268**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$

(C)  $(1, 1, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÜ LU**

**XX-915-276**

*Prüfungs-Nr.*

**269**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KÜ TI**

**XX-931-852**

*Prüfungs-Nr.*

**270**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KU**

**AL**

**XX-946-115**

*Prüfungs-Nr.*

**271**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KU SE**

**XX-922-919**

*Prüfungs-Nr.*

**272**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**KU LE**

**XX-920-201**

*Prüfungs-Nr.*

**273**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LA**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-927-081**

*Prüfungs-Nr.*

**274**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LA**

**PA**

**XX-928-840**

*Prüfungs-Nr.*

**275**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\text{im } f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\text{im } f = \text{im } g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LA**

*Vorname*

**PI**

*Legi-Nr.*

**XX-956-072**

*Prüfungs-Nr.*

**276**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LA**

*Vorname*

**GA**

*Legi-Nr.*

**XX-928-924**

*Prüfungs-Nr.*

**277**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LA**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-918-221**

*Prüfungs-Nr.*

**278**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$

(C)  $(1, 1, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LA**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-932-255**

*Prüfungs-Nr.*

**279**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LA**

**MA**

**XX-929-137**

*Prüfungs-Nr.*

**280**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LÄ**

**NI**

**XX-928-808**

*Prüfungs-Nr.*

**281**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**TI**

*Legi-Nr.*

**XX-914-840**

*Prüfungs-Nr.*

**282**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-921-092**

*Prüfungs-Nr.*

**283**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-931-399**

*Prüfungs-Nr.*

**284**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-914-287**

*Prüfungs-Nr.*

**285**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-927-289**

*Prüfungs-Nr.*

**286**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**CH**

*Legi-Nr.*

**XX-914-295**

*Prüfungs-Nr.*

**287**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LE**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-916-936**

*Prüfungs-Nr.*

**288**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**JI**

*Legi-Nr.*

**XX-949-317**

*Prüfungs-Nr.*

**289**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-932-181**

*Prüfungs-Nr.*

**290**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**TI**

*Legi-Nr.*

**XX-914-627**

*Prüfungs-Nr.*

**291**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-920-383**

*Prüfungs-Nr.*

**292**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-914-022**

*Prüfungs-Nr.*

**293**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-918-056**

*Prüfungs-Nr.*

**294**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-924-781**

*Prüfungs-Nr.*

**295**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LÖ SI**

**XX-922-702**

*Prüfungs-Nr.*

**296**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LO**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-927-925**

*Prüfungs-Nr.*

**297**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LÜ GI**

**XX-923-304**

*Prüfungs-Nr.*

**298**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LÜ TO**

**XX-930-416**

*Prüfungs-Nr.*

**299**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LU**

*Vorname*

**SE**

*Legi-Nr.*

**XX-951-859**

*Prüfungs-Nr.*

**300**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LU**

*Vorname*

**FJ**

*Legi-Nr.*

**XX-951-552**

*Prüfungs-Nr.*

**301**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**LÜ**

**RA**

**XX-919-666**

*Prüfungs-Nr.*

**302**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LU**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-748-140**

*Prüfungs-Nr.*

**303**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**LU**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-930-945**

*Prüfungs-Nr.*

**304**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**M A M A**

**XX-930-424**

*Prüfungs-Nr.*

**305**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MALE**

**XX-917-363**

*Prüfungs-Nr.*

**306**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**M A R A**

**XX-922-975**

*Prüfungs-Nr.*

**307**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MA CL**

**XX-939-863**

*Prüfungs-Nr.*

**308**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MATI**

**XX-949-607**

*Prüfungs-Nr.*

**309**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MALE**

**XX-917-074**

*Prüfungs-Nr.*

**310**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAAL**

**XX-926-851**

*Prüfungs-Nr.*

**311**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAAL**

**XX-932-818**

*Prüfungs-Nr.*

**312**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAFA**

**XX-928-691**

*Prüfungs-Nr.*

**313**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MASV**

**XX-915-474**

*Prüfungs-Nr.*

**314**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MALO**

**XX-927-099**

*Prüfungs-Nr.*

**315**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAAL**

**XX-919-013**

*Prüfungs-Nr.*

**316**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MANI**

**XX-945-647**

*Prüfungs-Nr.*

**317**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MATI**

**XX-925-284**

*Prüfungs-Nr.*

**318**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAJE**

**XX-727-656**

*Prüfungs-Nr.*

**319**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MAYV**

**XX-919-279**

*Prüfungs-Nr.*

**320**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**M A M A**

**XX-920-848**

*Prüfungs-Nr.*

**321**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MALA**

**XX-945-992**

*Prüfungs-Nr.*

**322**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MÄJO**

**XX-938-872**

*Prüfungs-Nr.*

**323**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MANA**

**XX-947-964**

*Prüfungs-Nr.*

**324**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**M A G I**

**XX-920-680**

*Prüfungs-Nr.*

**325**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME FR**

**XX-922-455**

*Prüfungs-Nr.*

**326**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME AL**

**XX-923-858**

*Prüfungs-Nr.*

**327**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME EL**

**XX-930-689**

*Prüfungs-Nr.*

**328**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME AN**

**XX-928-510**

*Prüfungs-Nr.*

**329**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME CI**

**XX-927-339**

*Prüfungs-Nr.*

**330**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME YA**

**XX-930-490**

*Prüfungs-Nr.*

**331**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME JA**

**XX-928-998**

*Prüfungs-Nr.*

**332**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME AN**

**XX-920-359**

*Prüfungs-Nr.*

**333**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME AN**

**XX-938-450**

*Prüfungs-Nr.*

**334**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ME MI**

**XX-921-175**

*Prüfungs-Nr.*

**335**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**MI**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-365**

*Prüfungs-Nr.*

**336**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**MI**

*Vorname*

**TH**

*Legi-Nr.*

**XX-918-858**

*Prüfungs-Nr.*

**337**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**MI**

*Vorname*

**EL**

*Legi-Nr.*

**XX-917-033**

*Prüfungs-Nr.*

**338**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MI**

**MA**

**XX-933-890**

*Prüfungs-Nr.*

**339**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOCH**

**XX-931-943**

*Prüfungs-Nr.*

**340**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOIM**

**XX-949-853**

*Prüfungs-Nr.*

**341**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOST**

**XX-951-875**

*Prüfungs-Nr.*

**342**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MO AD**

**XX-934-384**

*Prüfungs-Nr.*

**343**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MÖKL**

**XX-926-455**

*Prüfungs-Nr.*

**344**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOLI**

**XX-919-609**

*Prüfungs-Nr.*

**345**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOJO**

**XX-923-270**

*Prüfungs-Nr.*

**346**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$

(C)  $(1, 1, 0)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MOLO**

**XX-950-471**

*Prüfungs-Nr.*

**347**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MÜMA** **XX-917-844**  
*Prüfungs-Nr.*  
**348**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MÜVI**

**XX-942-503**

*Prüfungs-Nr.*

**349**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MU AB**

**XX-933-857**

*Prüfungs-Nr.*

**350**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MUNE**

**XX-932-016**

*Prüfungs-Nr.*

**351**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**MUTA**

**XX-922-612**

*Prüfungs-Nr.*

**352**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NÄ**

**LA**

**XX-922-786**

*Prüfungs-Nr.*

**353**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NÄ N O**

**XX-924-153**

*Prüfungs-Nr.*

**354**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NE**

**DO**

**XX-931-471**

*Prüfungs-Nr.*

**355**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NE**

**GA**

**XX-949-325**

*Prüfungs-Nr.*

**356**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NE TI**

**XX-918-650**

*Prüfungs-Nr.*

**357**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NE JO**

**XX-918-106**

*Prüfungs-Nr.*

**358**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NE LI**

**XX-052-775**

*Prüfungs-Nr.*

**359**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NG KE**

**XX-942-132**

*Prüfungs-Nr.*

**360**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NG**

**TH**

**XX-928-972**

*Prüfungs-Nr.*

**361**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**NI**

*Vorname*

**RO**

*Legi-Nr.*

**XX-744-652**

*Prüfungs-Nr.*

**362**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**NI**

*Vorname*

**ME**

*Legi-Nr.*

**XX-922-942**

*Prüfungs-Nr.*

**363**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NÖ LU**

**XX-920-764**

*Prüfungs-Nr.*

**364**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$

(C)  $(1, 1, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$

(B) 2

(C)  $-2a^2$

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**NO**

*Vorname*

**XE**

*Legi-Nr.*

**XX-930-200**

*Prüfungs-Nr.*

**365**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NO JO**

**XX-920-947**

*Prüfungs-Nr.*

**366**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**NT**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-952-485**

*Prüfungs-Nr.*

**367**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**NU RA**

**XX-928-436**

*Prüfungs-Nr.*

**368**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**OB**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-915-466**

*Prüfungs-Nr.*

**369**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**OC**

*Vorname*

**NA**

*Legi-Nr.*

**XX-917-926**

*Prüfungs-Nr.*

**370**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**OC**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-918-239**

*Prüfungs-Nr.*

**371**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**OE**

*Vorname*

**LI**

*Legi-Nr.*

**XX-933-865**

*Prüfungs-Nr.*

**372**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**OMTA**

**XX-954-788**

*Prüfungs-Nr.*

**373**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

OP

*Vorname*

CY

*Legi-Nr.*

XX-915-490

*Prüfungs-Nr.*

374

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**OT**

*Vorname*

**FE**

*Legi-Nr.*

**XX-917-561**

*Prüfungs-Nr.*

**375**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PA**

*Vorname*

**HA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-182**

*Prüfungs-Nr.*

**376**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PA**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-920-219**

*Prüfungs-Nr.*

**377**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PE**

*Vorname*

**GI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-001**

*Prüfungs-Nr.*

**378**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PE**

*Vorname*

**RI**

*Legi-Nr.*

**XX-928-758**

*Prüfungs-Nr.*

**379**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PE**

*Vorname*

**JE**

*Legi-Nr.*

**XX-937-546**

*Prüfungs-Nr.*

**380**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PE**

*Vorname*

**SE**

*Legi-Nr.*

**XX-932-628**

*Prüfungs-Nr.*

**381**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PE TO**

**XX-927-413**

*Prüfungs-Nr.*

**382**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PE DE**

**XX-942-215**

*Prüfungs-Nr.*

**383**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PE TO**

**XX-950-489**

*Prüfungs-Nr.*

**384**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PE**

*Vorname*

**SV**

*Legi-Nr.*

**XX-935-910**

*Prüfungs-Nr.*

**385**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PE**

**MA**

**XX-926-463**

*Prüfungs-Nr.*

**386**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PF**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-916-928**

*Prüfungs-Nr.*

**387**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PF**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-929-350**

*Prüfungs-Nr.*

**388**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PF**

*Vorname*

**DE**

*Legi-Nr.*

**XX-606-888**

*Prüfungs-Nr.*

**389**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PF**

*Vorname*

**NA**

*Legi-Nr.*

**XX-924-732**

*Prüfungs-Nr.*

**390**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PH LY**

**XX-922-884**

*Prüfungs-Nr.*

**391**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PI**

*Vorname*

**WI**

*Legi-Nr.*

**XX-930-986**

*Prüfungs-Nr.*

**392**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PI**

*Vorname*

**GA**

*Legi-Nr.*

**XX-931-992**

*Prüfungs-Nr.*

**393**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PL**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-950-497**

*Prüfungs-Nr.*

**394**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PL**

*Vorname*

**GL**

*Legi-Nr.*

**XX-921-381**

*Prüfungs-Nr.*

**395**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PL**

*Vorname*

**CH**

*Legi-Nr.*

**XX-954-796**

*Prüfungs-Nr.*

**396**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PL**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-928-882**

*Prüfungs-Nr.*

**397**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PO CÉ**

**XX-914-254**

*Prüfungs-Nr.*

**398**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PO**

*Vorname*

**CL**

*Legi-Nr.*

**XX-930-762**

*Prüfungs-Nr.*

**399**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**PO**

*Vorname*

**CH**

*Legi-Nr.*

**XX-936-828**

*Prüfungs-Nr.*

**400**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PU PI**

**XX-934-798**

*Prüfungs-Nr.*

**401**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PÜ NI**

**XX-935-654**

*Prüfungs-Nr.*

**402**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**PU GI**

**XX-919-161**

*Prüfungs-Nr.*

**403**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

QU

*Vorname*

GU

*Legi-Nr.*

**XX-953-252**

*Prüfungs-Nr.*

**404**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**R A P H**

**XX-930-185**

*Prüfungs-Nr.*

**405**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RA LU**

**XX-941-919**

*Prüfungs-Nr.*

**406**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RA**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-932-826**

*Prüfungs-Nr.*

**407**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RA MI**

**XX-930-051**

*Prüfungs-Nr.*

**408**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RA**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-947-790**

*Prüfungs-Nr.*

**409**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RA**

*Vorname*

**AB**

*Legi-Nr.*

**XX-925-416**

*Prüfungs-Nr.*

**410**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RE**

**PA**

**XX-933-353**

*Prüfungs-Nr.*

**411**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RE**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-582**

*Prüfungs-Nr.*

**412**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RE**

*Vorname*

**CY**

*Legi-Nr.*

**XX-922-967**

*Prüfungs-Nr.*

**413**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-652-842**

*Prüfungs-Nr.*

**414**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**FE**

*Legi-Nr.*

**XX-954-846**

*Prüfungs-Nr.*

**415**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-912-879**

*Prüfungs-Nr.*

**416**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-933-469**

*Prüfungs-Nr.*

**417**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-920-227**

*Prüfungs-Nr.*

**418**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**MI**

*Legi-Nr.*

**XX-944-160**

*Prüfungs-Nr.*

**419**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RI**

*Vorname*

**LU**

*Legi-Nr.*

**XX-939-392**

*Prüfungs-Nr.*

**420**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RO**

*Vorname*

**WI**

*Legi-Nr.*

**XX-949-341**

*Prüfungs-Nr.*

**421**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RÖ**

**KA**

**XX-934-590**

*Prüfungs-Nr.*

**422**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RÖ**

**JA**

**XX-917-777**

*Prüfungs-Nr.*

**423**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RÜ CH**

**XX-928-683**

*Prüfungs-Nr.*

**424**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RU**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-852**

*Prüfungs-Nr.*

**425**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**RÜ LU**

**XX-928-741**

*Prüfungs-Nr.*

**426**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**RU**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-917-579**

*Prüfungs-Nr.*

**427**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SA**

*Vorname*

**CH**

*Legi-Nr.*

**XX-923-866**

*Prüfungs-Nr.*

**428**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**SÄ**

**PA**

**XX-925-325**

*Prüfungs-Nr.*

**429**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**S A**

**L Á**

**XX-939-540**

*Prüfungs-Nr.*

**430**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**S A**

*Vorname*

**N I**

*Legi-Nr.*

**XX-923-784**

*Prüfungs-Nr.*

**431**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**S A**

*Vorname*

**S A**

*Legi-Nr.*

**XX-938-880**

*Prüfungs-Nr.*

**432**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SA**

*Vorname*

**JH**

*Legi-Nr.*

**XX-933-733**

*Prüfungs-Nr.*

**433**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SA**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-949-358**

*Prüfungs-Nr.*

**434**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**S A**

*Vorname*

**P A**

*Legi-Nr.*

**XX-928-634**

*Prüfungs-Nr.*

**435**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**S A**

*Vorname*

**M A**

*Legi-Nr.*

**XX-705-371**

*Prüfungs-Nr.*

**436**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-919-203**

*Prüfungs-Nr.*

**437**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-924-047**

*Prüfungs-Nr.*

**438**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**PH**

*Legi-Nr.*

**XX-951-883**

*Prüfungs-Nr.*

**439**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-923-619**

*Prüfungs-Nr.*

**440**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-928-148**

*Prüfungs-Nr.*

**441**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-933-808**

*Prüfungs-Nr.*

**442**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-939-872**

*Prüfungs-Nr.*

**443**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-916-035**

*Prüfungs-Nr.*

**444**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-925-556**

*Prüfungs-Nr.*

**445**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**BE**

*Legi-Nr.*

**XX-921-530**

*Prüfungs-Nr.*

**446**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-933-873**

*Prüfungs-Nr.*

**447**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-923-650**

*Prüfungs-Nr.*

**448**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**HA**

*Legi-Nr.*

**XX-922-984**

*Prüfungs-Nr.*

**449**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-471**

*Prüfungs-Nr.*

**450**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-356**

*Prüfungs-Nr.*

**451**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**LO**

*Legi-Nr.*

**XX-915-342**

*Prüfungs-Nr.*

**452**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-936-702**

*Prüfungs-Nr.*

**453**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**ME**

*Legi-Nr.*

**XX-206-275**

*Prüfungs-Nr.*

**454**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**EL**

*Legi-Nr.*

**XX-931-984**

*Prüfungs-Nr.*

**455**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-949-382**

*Prüfungs-Nr.*

**456**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-917-133**

*Prüfungs-Nr.*

**457**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**TH**

*Legi-Nr.*

**XX-927-067**

*Prüfungs-Nr.*

**458**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-917-264**

*Prüfungs-Nr.*

**459**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**AN**

*Legi-Nr.*

**XX-920-698**

*Prüfungs-Nr.*

**460**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-914-817**

*Prüfungs-Nr.*

**461**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-928-675**

*Prüfungs-Nr.*

**462**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**JE**

*Legi-Nr.*

**XX-856-004**

*Prüfungs-Nr.*

**463**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**KI**

*Legi-Nr.*

**XX-938-898**

*Prüfungs-Nr.*

**464**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**AM**

*Legi-Nr.*

**XX-921-373**

*Prüfungs-Nr.*

**465**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**EL**

*Legi-Nr.*

**XX-923-288**

*Prüfungs-Nr.*

**466**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-931-125**

*Prüfungs-Nr.*

**467**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**EM**

*Legi-Nr.*

**XX-920-706**

*Prüfungs-Nr.*

**468**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**CR**

*Legi-Nr.*

**XX-917-256**

*Prüfungs-Nr.*

**469**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**HU**

*Legi-Nr.*

**XX-924-799**

*Prüfungs-Nr.*

**470**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-918-098**

*Prüfungs-Nr.*

**471**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**TO**

*Legi-Nr.*

**XX-934-657**

*Prüfungs-Nr.*

**472**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

---

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**EI**

*Legi-Nr.*

**XX-924-054**

*Prüfungs-Nr.*

**473**

---

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-931-778**

*Prüfungs-Nr.*

**474**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-725-866**

*Prüfungs-Nr.*

**475**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-810-312**

*Prüfungs-Nr.*

**476**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-938-781**

*Prüfungs-Nr.*

**477**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**PA**

*Legi-Nr.*

**XX-919-815**

*Prüfungs-Nr.*

**478**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SC**

*Vorname*

**IS**

*Legi-Nr.*

**XX-709-077**

*Prüfungs-Nr.*

**479**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SE**

*Vorname*

**CL**

*Legi-Nr.*

**XX-948-517**

*Prüfungs-Nr.*

**480**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SE**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-920-235**

*Prüfungs-Nr.*

**481**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SE**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-915-632**

*Prüfungs-Nr.*

**482**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**SE**

**VÉ**

**XX-916-899**

*Prüfungs-Nr.*

**483**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SE**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-921-019**

*Prüfungs-Nr.*

**484**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SH**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-954-473**

*Prüfungs-Nr.*

**485**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SH**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-914-311**

*Prüfungs-Nr.*

**486**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SI**

*Vorname*

**PH**

*Legi-Nr.*

**XX-924-716**

*Prüfungs-Nr.*

**487**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SI**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-650-713**

*Prüfungs-Nr.*

**488**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SI**

*Vorname*

**VA**

*Legi-Nr.*

**XX-949-366**

*Prüfungs-Nr.*

**489**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SM**

*Vorname*

**FI**

*Legi-Nr.*

**XX-949-374**

*Prüfungs-Nr.*

**490**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SO**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-932-124**

*Prüfungs-Nr.*

**491**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SO**

*Vorname*

**RA**

*Legi-Nr.*

**XX-919-096**

*Prüfungs-Nr.*

**492**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SO**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-920-011**

*Prüfungs-Nr.*

**493**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SP**

*Vorname*

**FE**

*Legi-Nr.*

**XX-935-662**

*Prüfungs-Nr.*

**494**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$

(C)  $(1, 1, 1)$

(D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$

(B) 2

(C)  $-2a^2$

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SP**

*Vorname*

**GA**

*Legi-Nr.*

**XX-923-502**

*Prüfungs-Nr.*

**495**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-095**

*Prüfungs-Nr.*

**496**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**AD**

*Legi-Nr.*

**XX-947-576**

*Prüfungs-Nr.*

**497**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**AY**

*Legi-Nr.*

**XX-929-732**

*Prüfungs-Nr.*

**498**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**NU**

*Legi-Nr.*

**XX-930-440**

*Prüfungs-Nr.*

**499**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**ST**

*Legi-Nr.*

**XX-950-703**

*Prüfungs-Nr.*

**500**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**RI**

*Legi-Nr.*

**XX-931-697**

*Prüfungs-Nr.*

**501**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-917-546**

*Prüfungs-Nr.*

**502**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**TI**

*Legi-Nr.*

**XX-949-861**

*Prüfungs-Nr.*

**503**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**ST**

**SÉ**

**XX-925-903**

*Prüfungs-Nr.*

**504**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**AR**

*Legi-Nr.*

**XX-930-697**

*Prüfungs-Nr.*

**505**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**IS**

*Legi-Nr.*

**XX-921-440**

*Prüfungs-Nr.*

**506**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-932-083**

*Prüfungs-Nr.*

**507**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ST**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-926-489**

*Prüfungs-Nr.*

**508**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SU**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-929-392**

*Prüfungs-Nr.*

**509**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**SZ**

*Vorname*

**KA**

*Legi-Nr.*

**XX-916-027**

*Prüfungs-Nr.*

**510**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**TA**

*Vorname*

**JO**

*Legi-Nr.*

**XX-923-312**

*Prüfungs-Nr.*

**511**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TA**

**MA**

**XX-915-458**

*Prüfungs-Nr.*

**512**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TÄ**

**DE**

**XX-929-021**

*Prüfungs-Nr.*

**513**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**TA**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-365**

*Prüfungs-Nr.*

**514**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH RE**

**XX-947-980**

*Prüfungs-Nr.*

**515**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH**

**AL**

**XX-943-317**

*Prüfungs-Nr.*

**516**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH**

**MA**

**XX-928-220**

*Prüfungs-Nr.*

**517**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH RE**

**XX-937-396**

*Prüfungs-Nr.*

**518**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH CÉ**

**XX-916-324**

*Prüfungs-Nr.*

**519**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**TH**

*Vorname*

**SO**

*Legi-Nr.*

**XX-916-191**

*Prüfungs-Nr.*

**520**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TH SI**

**XX-926-286**

*Prüfungs-Nr.*

**521**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**TI**

*Vorname*

**JA**

*Legi-Nr.*

**XX-931-463**

*Prüfungs-Nr.*

**522**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TO ZO**

**XX-922-918**

*Prüfungs-Nr.*

**523**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TO**

**CA**

**XX-922-498**

*Prüfungs-Nr.*

**524**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TR LI**

**XX-922-926**

*Prüfungs-Nr.*

**525**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\text{im } f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\text{im } f = \text{im } g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TR SE**

**XX-951-594**

*Prüfungs-Nr.*

**526**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TR**

**YA**

**XX-926-695**

*Prüfungs-Nr.*

**527**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TU LE**

**XX-944-228**

*Prüfungs-Nr.*

**528**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**TÜ**

**QU**

**XX-934-814**

*Prüfungs-Nr.*

**529**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**UE**

**GR**

**XX-934-608**

*Prüfungs-Nr.*

**530**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**UG RU**

**XX-925-796**

*Prüfungs-Nr.*

**531**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**UR KR**

**XX-927-537**

*Prüfungs-Nr.*

**532**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**UR SE**

**XX-916-019**

*Prüfungs-Nr.*

**533**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**V A**

*Vorname*

**M A**

*Legi-Nr.*

**XX-929-145**

*Prüfungs-Nr.*

**534**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VA**

*Vorname*

**OS**

*Legi-Nr.*

**XX-930-713**

*Prüfungs-Nr.*

**535**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**V A**

*Vorname*

**W I**

*Legi-Nr.*

**XX-948-955**

*Prüfungs-Nr.*

**536**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VA**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-930-730**

*Prüfungs-Nr.*

**537**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VA**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-925-051**

*Prüfungs-Nr.*

**538**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VA**

*Vorname*

**FL**

*Legi-Nr.*

**XX-923-099**

*Prüfungs-Nr.*

**539**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**V A**

*Vorname*

**M A**

*Legi-Nr.*

**XX-924-187**

*Prüfungs-Nr.*

**540**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**V A**

*Vorname*

**A N**

*Legi-Nr.*

**XX-934-962**

*Prüfungs-Nr.*

**541**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VE**

*Vorname*

**DA**

*Legi-Nr.*

**XX-936-513**

*Prüfungs-Nr.*

**542**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VE**

*Vorname*

**LE**

*Legi-Nr.*

**XX-922-496**

*Prüfungs-Nr.*

**543**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VI**

*Vorname*

**AL**

*Legi-Nr.*

**XX-941-232**

*Prüfungs-Nr.*

**544**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VI**

*Vorname*

**AP**

*Legi-Nr.*

**XX-927-909**

*Prüfungs-Nr.*

**545**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

- (C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0  
(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$

(C)  $(2, 1, 1)$

(D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\text{im } f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.

(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

(D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\text{im } f = \text{im } g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$

(B)  $-2$

(C)  $-2(1+2a)$

(D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**GI**

*Legi-Nr.*

**XX-920-690**

*Prüfungs-Nr.*

**546**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-195**

*Prüfungs-Nr.*

**547**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**YV**

*Legi-Nr.*

**XX-933-477**

*Prüfungs-Nr.*

**548**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**FA**

*Legi-Nr.*

**XX-945-752**

*Prüfungs-Nr.*

**549**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**AR**

*Legi-Nr.*

**XX-922-645**

*Prüfungs-Nr.*

**550**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**NO**

*Legi-Nr.*

**XX-930-846**

*Prüfungs-Nr.*

**551**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**VO**

*Vorname*

**CO**

*Legi-Nr.*

**XX-951-891**

*Prüfungs-Nr.*

**552**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WAJO**

**XX-930-532**

*Prüfungs-Nr.*

**553**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WALI**

**XX-927-025**

*Prüfungs-Nr.*

**554**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WAKE**

**XX-931-703**

*Prüfungs-Nr.*

**555**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WAJU**

**XX-930-077**

*Prüfungs-Nr.*

**556**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WARO**

**XX-951-917**

*Prüfungs-Nr.*

**557**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WEEL**

**XX-924-567**

*Prüfungs-Nr.*

**558**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WENI**

**XX-914-410**

*Prüfungs-Nr.*

**559**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WELI**

**XX-920-243**

*Prüfungs-Nr.*

**560**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WESE**

**XX-954-853**

*Prüfungs-Nr.*

**561**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WEIA**

**XX-923-874**

*Prüfungs-Nr.*

**562**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WEJU**

**XX-915-052**

*Prüfungs-Nr.*

**563**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WENI**

**XX-926-183**

*Prüfungs-Nr.*

**564**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**W E M A**

**XX-939-995**

*Prüfungs-Nr.*

**565**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WE SI**

**XX-925-572**

*Prüfungs-Nr.*

**566**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WEJA**

**XX-915-615**

*Prüfungs-Nr.*

**567**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**VI**

*Legi-Nr.*

**XX-921-739**

*Prüfungs-Nr.*

**568**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-925-242**

*Prüfungs-Nr.*

**569**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**CA**

*Legi-Nr.*

**XX-934-319**

*Prüfungs-Nr.*

**570**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**MII**

*Legi-Nr.*

**XX-926-190**

*Prüfungs-Nr.*

**571**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-922-025**

*Prüfungs-Nr.*

**572**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**AR**

*Legi-Nr.*

**XX-950-711**

*Prüfungs-Nr.*

**573**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WI DA**

**XX-925-580**

*Prüfungs-Nr.*

**574**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-931-976**

*Prüfungs-Nr.*

**575**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**PH**

*Legi-Nr.*

**XX-918-452**

*Prüfungs-Nr.*

**576**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**ME**

*Legi-Nr.*

**XX-930-804**

*Prüfungs-Nr.*

**577**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WI**

**MA**

**XX-927-107**

*Prüfungs-Nr.*

**578**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**WI**

*Vorname*

**SI**

*Legi-Nr.*

**XX-917-645**

*Prüfungs-Nr.*

**579**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WOLU**

**XX-937-903**

*Prüfungs-Nr.*

**580**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WOAN**

**XX-916-514**

*Prüfungs-Nr.*

**581**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.
- (B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.
- (C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.
- (D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$
$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**W O D A**

**XX-949-887**

*Prüfungs-Nr.*

**582**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**W O M A**

**XX-057-604**

*Prüfungs-Nr.*

**583**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**W O M A**

**XX-952-932**

*Prüfungs-Nr.*

**584**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0



(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WÜNI**

**XX-935-143**

*Prüfungs-Nr.*

**585**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$



- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

*Vorname*

*Legi-Nr.*

**WYRO**

**XX-924-252**

*Prüfungs-Nr.*

**586**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) indefinit  
(B) positiv semidefinit  
(C) negative definit  
(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**YA**

*Vorname*

**DU**

*Legi-Nr.*

**XX-924-063**

*Prüfungs-Nr.*

**587**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A)  $A + C^T$

(B)  $A + C$

(C)  $AB$

(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

(A)  $(-2, 1, -1)$

(B)  $(-2, 0, 1)$

(C)  $(-2, 1, 1)$

(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

(A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**YA**

*Vorname*

**KE**

*Legi-Nr.*

**XX-925-939**

*Prüfungs-Nr.*

**588**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**YE**

*Vorname*

**YA**

*Legi-Nr.*

**XX-914-916**

*Prüfungs-Nr.*

**589**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**YO**

*Vorname*

**AJ**

*Legi-Nr.*

**XX-942-776**

*Prüfungs-Nr.*

**590**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZA**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-932-966**

*Prüfungs-Nr.*

**591**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .



(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 8, 0

(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A + C$ (B)  $AB$ (C)  $A^2$ (D)  $A + C^T$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(0, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, 1)$ (D)  $(-2, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 1, 1)$

(B)  $(2, 1, 1)$ (C)  $(1, 1, 0)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ 

(B) 2

(C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZH**

*Vorname*

**MA**

*Legi-Nr.*

**XX-942-210**

*Prüfungs-Nr.*

**592**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0



- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZH**

*Vorname*

**YI**

*Legi-Nr.*

**XX-917-488**

*Prüfungs-Nr.*

**593**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$



- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZH**

*Vorname*

**WE**

*Legi-Nr.*

**XX-947-167**

*Prüfungs-Nr.*

**594**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**SO**

*Legi-Nr.*

**XX-934-579**

*Prüfungs-Nr.*

**595**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**SA**

*Legi-Nr.*

**XX-929-160**

*Prüfungs-Nr.*

**596**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**MI**

*Legi-Nr.*

**XX-735-395**

*Prüfungs-Nr.*

**597**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-924-098**

*Prüfungs-Nr.*

**598**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**SE**

*Legi-Nr.*

**XX-918-099**

*Prüfungs-Nr.*

**599**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .



(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZI**

*Vorname*

**JU**

*Legi-Nr.*

**XX-929-780**

*Prüfungs-Nr.*

**600**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0



- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZU**

*Vorname*

**NI**

*Legi-Nr.*

**XX-920-714**

*Prüfungs-Nr.*

**601**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$



- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**ZU**

*Vorname*

**RI**

*Legi-Nr.*

**XX-928-857**

*Prüfungs-Nr.*

**602**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) positiv definit

(B) indefinit

(C) positiv semidefinit

(D) negative definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(1, 0, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2$ (B)  $-2(1 + 2a)$ (C)  $2$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A)  $1$ (B)  $2$ (C)  $4$ (D)  $3$ 

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-**  
**XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**603**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

- (C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) negativ definit  
(B) indefinit  
(C) positiv definit  
(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 2, 8, 0

(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A) 2

(B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $-2a^2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$



## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

# Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-**  
**XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**604**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

(C) 2, 1, 0

(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $A^2$ (B)  $AB$ (C)  $A + C^T$ (D)  $A + C$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, -1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(0, 1, -1)$ (D)  $(-2, 1, 1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2(1+2a)$
- (B) 2
- (C)  $-2a^2$
- (D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-**  
**XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**605**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(2, 1, 1)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-  
XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**606**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*



## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(D) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(D) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $AB$   
(C)  $A^2$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 1)$

- (B)  $(2, 1, 1)$
- (C)  $(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 0, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2a^2$
- (B) 2
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

- (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$   
(B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$   
(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$   
(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.  
(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-  
XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**607**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1/2$

(C)  $a = 1$

(D)  $a = 1/3$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .



- (C) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) indefinit  
(C) positiv semidefinit  
(D) negativ definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 1, 0  
(B) 1, 0

- (C) 2, 8, 0  
(D) 2, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C^T$   
(B)  $A + C$   
(C)  $AB$   
(D)  $A^2$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(0, 1, -1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

- (B)  $(1, 1, 1)$
- (C)  $(1, 0, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (C)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .
- (D)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A)  $-2$
- (B)  $-2(1 + 2a)$
- (C)  $2$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 3

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-  
XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**608**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(C) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = -1/3$

(B)  $a = 1$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A)  $\det(-A) = \det A$ .

(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(D) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) negativ definit

(B) indefinit

(C) positiv definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 1, 0

(B) 2, 8, 0



(C) 2, 0

(D) 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?(A)  $AB$ (B)  $A + C^T$ (C)  $A + C$ (D)  $A^2$ **1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?(A)  $(-2, 1, 1)$ (B)  $(-2, 0, 1)$ (C)  $(-2, 1, -1)$ (D)  $(0, 1, -1)$ **1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?(A)  $(1, 0, 1)$

- (B)  $(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 1)$
- (D)  $(2, 1, 1)$

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.
- (B) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B)  $-2$
- (C)  $-2(1+2a)$
- (D)  $-2a^2$

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.
- (B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (D) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(C) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-**  
**XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**609**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1/2$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(B)  $\det(-A) = \det A$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv definit

(C) negative definit

(D) positiv semidefinit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 0

(B) 1, 0

- (C) 2, 1, 0  
(D) 2, 8, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A^2$   
(B)  $AB$   
(C)  $A + C^T$   
(D)  $A + C$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(0, 1, -1)$   
(D)  $(-2, 1, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 0, 1)$



(B)  $(1, 1, 0)$ (C)  $(1, 1, 1)$ (D)  $(2, 1, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ (B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (C) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2(1+2a)$ 

(B) 2

(C)  $-2a^2$ 

(D) -2

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(C) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .(D) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

(D) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D-MAVT/D-MATL

**Prüfung Lineare Algebra I/II**

401-0171-00L/401-0172-00L

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-**  
**XXX**

*Prüfungs-Nr.*

**610**

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A)  $a = 1$

(B)  $a = -1/3$

(C)  $a = 1/3$

(D)  $a = 1/2$

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .

(C) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .

(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

(A) indefinit

(B) positiv semidefinit

(C) negative definit

(D) positiv definit

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.

(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.

(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .

(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 1, 0  
(D) 2, 1, 0

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $A + C$   
(B)  $A^2$   
(C)  $AB$   
(D)  $A + C^T$

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(-2, 1, -1)$   
(B)  $(0, 1, -1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 0, 1)$

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$

(B)  $(1, 1, 1)$ (C)  $(2, 1, 1)$ (D)  $(1, 0, 1)$ 

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .(B) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.(C)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ (D) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ 

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

(A)  $-2a^2$ (B)  $-2$ (C)  $-2(1+2a)$ (D)  $2$ 

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .(B) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .(C) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.(D) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

(A) 4

(B) 1

(C) 3

(D) 2

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



(B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

(A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

(C)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(D)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

(A) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.

(B) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.

(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.

(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?
22. Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .