

# Aufgaben und Lösungsvorschlag

## Aufgabe 1

### Single Choice-Aufgaben

**1.MC1 [1 Punkt]** Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B. Entweder Ausschlussverfahren, indem man einige Einträge des Produktes von  $A$  mit den vorgeschlagenen Matrizen berechnet, oder das Gauss-Jordan-Verfahren auf  $A$  anwenden.

**1.MC2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome  $p$  mit einem Grad  $\leq 3$ , so dass  $p(2) = 0$ .

(B) Die Menge der Vektoren  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

(C) Die Menge  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$ .

(D) Die Menge  $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A: Die Menge ist abgeschlossen unter Addition und unter Multiplikation mit Skalaren.

Die Menge in B ist nicht abgeschlossen unter Addition, denn z. B. gehören  $e_1$  und  $e_2 + e_3$  zur Menge, jedoch nicht ihre Summe.

Die Menge in C ist nicht abgeschlossen unter Addition, denn z. B. sind  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  singulär,  $A + B$  jedoch regulär.

Man sieht schnell, dass der Nullvektor nicht zur Menge bei D gehört.

**1.MC3 [1 Punkt]** Für welchen Wert von  $a$  besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

- (A)  $a = 1/2$   
(B)  $a = 1/3$   
(C)  $a = -1/3$   
(D)  $a = 1$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A: Das Gauss-Verfahren liefert das Endschema

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 - 3a \end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingung ergibt  $a = -1/3$ .

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann gilt...

- (A) Wenn  $A$  invertierbar ist und  $A^{-1} = A^T$ , dann ist  $\det A = \pm 1$ .  
(B) Wenn  $A^T = -A$ , dann ist  $\det A = -1$ .  
(C) Wenn  $A^3 = 3A$ , dann ist  $\det A = 3^n$ .  
(D)  $\det(-A) = \det A$ .

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A: Es gilt nämlich  $1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det A \cdot \det(A^T) = (\det A)^2$ .

Die übrigen Varianten schliesst man aus, denn allgemein gilt  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**1.MC5 [1 Punkt]** Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist D: Die Funktionen in B sind keine Lösungen (einsetzen!). Die Funktionen in A und in C sind Lösungen, spannen aber je für sich den Lösungsraum nicht auf.

**1.MC6 [1 Punkt]** Die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  ist

- (A) positiv definit  
(B) negative definit  
(C) indefinit  
(D) positiv semidefinit

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A: Die zugehörige Matrix  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist positiv definit (Hurwitz).  
Oder so:  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2)$ .

**1.MC7 [1 Punkt]** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.  
(B) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.  
(C) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $90^\circ$ .  
(D) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$ .

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B: Der Punkt mit den Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  wird abgebildet auf den Punkt mit den Koordinaten  $(x_1, x_3, x_2)$ . Dies entspricht einer Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung  $x_2 = x_3$ .

**1.MC8 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^T$ ?

- (A) 2, 8, 0
- (B) 2, 0
- (C) 2, 1, 0
- (D) 1, 0

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B: Die Eigenwerte von  $A^T$  und von  $A$  stimmen überein. Zur Berechnung von  $\det(A - \lambda \mathbb{I})$  entwickle man die Determinante nach der zweiten Spalte.

**1.MC9 [1 Punkt]** Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A, wie man sofort abliest.

**1.MC10 [1 Punkt]** Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A)  $AB$
- (B)  $A^2$

- (C)  $A + C$   
(D)  $A + C^T$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist D. Alle anderen Operationen sind für die gegebenen Matrizen nicht definiert.

**1.MC11 [1 Punkt]** Seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)^T$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Welcher der folgenden Vektoren  $v$  ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu  $v_1$  und zu  $v_2$ ?

- (A)  $(0, 1, -1)$   
(B)  $(-2, 0, 1)$   
(C)  $(-2, 1, 1)$   
(D)  $(-2, 1, -1)$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist C: Der Vektor bei A ist nicht orthogonal zu  $v_2$ , der Vektor bei B ist nicht orthogonal zu  $v_1$ , der Vektor bei D ist weder zu  $v_1$  noch zu  $v_2$  orthogonal. Alternative: Berechne das Vektorprodukt  $v_1 \times v_2$ .

**1.MC12 [1 Punkt]** Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix  $A$ ?

- (A)  $(1, 1, 0)$   
(B)  $(1, 0, 1)$   
(C)  $(2, 1, 1)$   
(D)  $(1, 1, 1)$

**Lösung:**

Die richtige Lösung ist D: Nur dieser Vektor erfüllt die Eigenwertgleichung  $Ax = \lambda x$  nicht.

**1.MC13 [1 Punkt]** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn  $f$  invertierbar ist, dann ist  $f^{-1}$  linear.  
(B)  $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$   
(C) Wenn  $\ker f = \ker g$ , dann folgt  $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$   
(D)  $\operatorname{im} f$  ist orthogonal zu  $\ker f$ .

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist offensichtlich A. Seien  $F$  und  $G$  die Darstellungsmatrizen von  $f$  und  $g$ . Dann ist  $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ein Gegenbeispiel für B, denn  $\ker f = \text{span } e_1$ , aber  $\ker GF = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist  $\mathbb{R}^2$ . Ein Gegenbeispiel für C ist  $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ein Gegenbeispiel für D ist  $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**1.MC14 [1 Punkt]** Welchen Wert hat die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ ? Hinweis: Ver-

wenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $-2a^2$
- (D)  $-2(1+2a)$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B, wie man mit den Blocksatz sofort sieht.

**1.MC15 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $AB = 0$ , dann gilt  $\det A = \det B = 0$ .
- (B) Wenn  $A^2 = 0$ , dann ist  $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$ .
- (C) Wenn  $A = (A^{-1})^T$ , dann gilt  $\det A = 1$ .
- (D) Wenn  $\det A = 0$ , dann ist  $A^2$  die Nullmatrix.

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B: Es gilt  $(\mathbb{I} + A)(\mathbb{I} - A) = \mathbb{I}^2 - A^2 = \mathbb{I}$ .

Gegenbeispiel für A:  $A = 0$  und  $B$  irgendeine reguläre Matrix.

Gegenbeispiel für C:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Gegenbeispiel für D:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1.MC16 [1 Punkt]** Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  eine Abbildung  $f(x) = Ax$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

die Dimension des Bilds von  $f$  gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist C: Die drei Spalten der Matrix sind linear unabhängig. Das sieht man mit Gauss, oder indem man bemerkt, dass die Untermatrix  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq 0$ .

**1.MC17 [1 Punkt]** Neben der Standardbasis  $\mathcal{E}$  in  $\mathbb{R}^2$  sei noch die Basis  $\mathcal{B} = \{(2,0)^T, (3,4)^T\}$  gegeben. Für welche der folgenden Matrizen  $M$ , gilt  $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$  für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ ?

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- (B)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (C)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist B: Die Matrix  $M$  ist die Übergangsmatrix von  $\mathcal{E}$  zu  $\mathcal{B}$ , also die Inverse der Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{E}$ . ist: Die Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{E}$  ist  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Als Inverse kommt nur die Matrix in B infrage.

**1.MC18 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (A)  $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$
- (B)  $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C)  $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$
- (D)  $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist D.

**1.MC19 [1 Punkt]** Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ?

- (A) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von  $A$  ungleich Null.  
(B) Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, dann ist  $A^2$  auch diagonalisierbar.  
(C) Wenn  $A$  invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist  $A^{-1}$  diagonalisierbar.  
(D) Wenn  $A$  einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist  $A$  invertierbar.

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist klarerweise D: Z.B.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

A: Ist ein Eigenwert  $\lambda = 0$ , dann hätte man für das charakteristische Polynom  $p_A(0) = \det A = 0$ , ein Widerspruch.

B: Schreibe  $A = TDT^{-1}$ , mit  $D$  diagonal. Dann ist  $A^2 = TD^2T^{-1}$  ebenfalls diagonalisierbar.

C: Schreibe  $A = TDT^{-1}$ . Dann folgt  $A^{-1} = TD^{-1}T^{-1}$ .

**1.MC20 [1 Punkt]** Sei  $V$  der reelle Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$ . Was ist die Abbildungsmatrix  $[g]_{\mathcal{B}}$  der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$   
(B)  $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$   
(D)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Die korrekte Lösung ist A: Es gilt

$$g(e^x) = e^x + 4e^x - 5e^x = 0 \\ g(e^{3x}) = 9e^{3x} + 12e^{3x} - 5e^x = 16e^{3x},$$

und somit

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$



## Aufgabe 2

## Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) [3 Punkte] Sei  $k = 0$ . Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix  $T$ , so dass  $T^{-1}A_0T$  diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für  $k = -10$ , falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$ .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von  $k$  ist  $A_k$  diagonalisierbar?

**Lösung:**

- (a)  $A_0 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ist symmetrisch, also diagonalisierbar mit einer orthogonalen Transformationsmatrix  $T$ .  $T$  hat als Spalten die Eigenvektoren von  $A_0$ . Die Eigenwerte von  $A_0$  sind  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -10$ . Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist  $E_0 = \ker A_0$  und wird aufgespannt von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert  $-10$  ist  $E_{-10} = \ker(A_0 + 10\mathbb{I})$  und wird aufgespannt vom Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Die Spalten sind bereits paarweise orthogonal, wir müssen

sie nur noch normieren:  $T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(c) The characteristic polynomial is

$$\begin{aligned}
 p_k(x) &= \det \begin{pmatrix} x+9 & -k & -3 \\ 0 & x-k & 0 \\ -3 & 0 & x+1 \end{pmatrix} \\
 &= -3(3(x-k)) + (x+1)(x+9)(x-k) \\
 &= (x-k)(-9 + (x+1)(x+9)) \\
 &= (x-k)(x^2 + 10x) \\
 &= x(x-k)(x+10).
 \end{aligned}$$

The eigenvalues are  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = k$  and  $\lambda_3 = -10$ . If  $k \in \mathbb{R}$  and  $k \neq 0$ ,  $k \neq -10$ , then  $A_k$  is diagonalizable, since all the eigenvalues have multiplicity 1.

Case  $k = 0$ : the eigenvalue 0 has multiplicity 2, the dimension of the corresponding eigenspace is

$$\dim V_0 = 3 - \text{rank}(0 \cdot I - A_0) = 3 - \text{rank} A_0 = 2.$$

A similar computation shows that

$$\dim V_{-10} = 3 - \text{rank}(-10 \cdot I - A_0) = 1,$$

which again agrees with the multiplicity of the corresponding eigenvalue. In particular, the matrix  $A_0$  is diagonalizable.

Case  $k = -10$ : in this case the dimension of the eigenspace of the eigenvalue  $-10$  has dimension 1, which is lower than the multiplicity of the eigenvalue itself. Hence,  $A_{-10}$  is not diagonalizable.

(c) It is enough to take an eigenvectors from each eigenspace. The space  $V_0$  is given by

$$\begin{cases} -9x - 10y + 3z = 0 \\ -10y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = 3x \end{cases};$$

thus  $V_0 = \langle (1, 0, 3) \rangle$ . Similarly for  $V_{-10}$ ,

$$\begin{cases} -9x - 10y + 3z = -10x \\ -10y = -10y \\ 3x - z = -10z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3z \\ y = 0 \end{cases};$$

so  $V_{-10} = \langle (-3, 0, 1) \rangle$ . Take for instance  $v_1 = (1, 0, 3)$  and  $v_2 = (-3, 0, 1)$ .

**22.** Sei  $P_2$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für  $p, q \in P_2$ :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

**(a) [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Polynome  $p(x) = 3x^2 - 2$  und  $q(x) = x + 1$  bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.

- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x^2 + x + 1$  orthogonal auf den Unterraum  $\text{span}(1, x)$ .

**Lösung:**

(a)  $\langle p, q \rangle = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$ .

(b) We find the norm of the first polynomial

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{3},$$

hence  $b_1(X) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Let now

$$\tilde{b}_2(X) = X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

where

$$\langle X, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

We now normalize  $\tilde{b}_2(X)$ :

$$\|X\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

The normalized vector is then  $b_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}X$ .

We proceed by computing

$$\tilde{b}_3(X) = X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{2}}X \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}X - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = X^2 - \frac{2}{3}.$$

The norm of  $\tilde{b}_3(X)$  is

$$\left| X^2 - \frac{2}{3} \right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

The third basis vector is then

$$b_3(X) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{6}}{3},$$

and we get the orthonormal basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}X, \frac{\sqrt{6}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}.$$

- (c) From (a), we have the orthonormal basis of  $\langle 1, X \rangle$  given by  $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}X \right\}$ . The orthogonal projection of  $X^2 + X + 1$  on this space is then

$$\langle X^2 + X + 1, \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle \frac{\sqrt{3}}{3} + \langle X^2 + X + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}X \rangle \frac{\sqrt{2}}{2}X = X + \frac{5}{3}.$$

**23.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [2 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) [5 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems  $Y' = AY$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $Y' = AY + B$  mit  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Lösung:**

- (a) Die Gleichung  $y'' = y' + 6y$  geht durch die Substitution  $y_1 = y$  and  $y_2 = y'$  über ins das äquivalente System

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 6y_1 + y_2 \end{cases},$$

das heisst,  $Y' = AY$ , mit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -6 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = -2$ . Die zugehörigen Eigenvektoren sind  $v_1 = (1, 3)^T$  und  $v_2 = (1, -2)^T$ . Die allgemeine Lösung is somit

$$Y(x) = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Zur Lösung des Anfangswertproblems setzen wir in der allgemeinen Lösung  $x = 0$  und erhalten

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ 3C_1 - 2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man findet  $C_1 = 3/5$  und  $C_2 = 2/5$ . Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$Y(x) = \frac{3}{5} e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Wir addieren die allgemeine Lösung des homogenen Systems zu einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems. Dazu wählen wir eine stationäre Lösung, also  $Y' = 0$ : Das heisst

$0 = AY + B$  oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -6y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Man findet  $y_1 = 1$  und  $y_2 = -6$ . Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet also

$$Y(x) = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$