Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) Sei $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Dann gilt

- ☐ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$.
- ☐ $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.
- ☐ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$.
- ☐ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

(b) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \cap \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

- ☐ Richtig
- ☐ Falsch

(c) $\min\{\frac{k}{k+2} \mid k \in \mathbb{N}\} = 0$. Hier ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

- ☐ Ja
- ☐ Nein

(d) Sei S eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Supremum. Dann gilt:

- ☐ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von S, so dass $a - \varepsilon < b < a$;
- ☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum;
- ☐ a ist das Infimum der oberen Schranken.

***1.2. Axiome der reellen Zahlen.** Zeigen Sie, dass für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, wobei $x \leq y$ und $u \leq v$, folgendes gilt:

$$x + u \leq y + v.$$

1.3. Supremum und Infimum I. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a > 0$ und S eine nichtleere, von oben beschränkte Menge. Beweisen Sie, dass folgendes gilt:

$$\sup_{x \in S}(ax + b) = a \sup_{x \in S} x + b.$$

***1.4. Supremum und Infimum II.** Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A_1 = \left\{ x^2 - 5x + 6 \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} \,\middle|\, k, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.5. Komplexe Zahlen - Wiederholung. Finden Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen z

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -42, \qquad z_2 = -\frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1-i}{1+i},$$
$$z_4 = \cos\alpha + i \sin\alpha, \qquad z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$
$$z_6 = 2022 + i^{2021}, \qquad z_7 = (1+i)^6,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Vielleicht möchten Sie z_7 zuerst in Polar Form schreiben.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1 + i$ ist OK, $1/(1 + i)$ nicht.