

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

- Eine Folge kann höchstens ein Grenzwert haben.
- Jede monotone und von oben beschränkte Folge ist konvergent.
- Es gibt konvergente Folgen, die nicht beschränkt sind.
- Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Seien (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen in \mathbb{R} mit $c_n = a_n + b_n$.

- Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

- Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- Falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.
- Falls (c_n) konvergiert, konvergiert mindestens eine der Folgen (a_n) und (b_n) .

(c) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} .

- Falls $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$

gilt, dann konvergiert (a_n) .

- Falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent.
- Falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent.
- Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \quad \forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

2.2. Folgenkonvergenz Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Das heißt, eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

***2.3. Grenzwert I.** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Der Binomialsatz könnte nützlich sein. Für jede reelle Zahl x gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Grenzwert II. Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

***(a)** $a_n = \frac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5};$

***(b)** $b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n;$

(c) $c_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n};$

(d) $d_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1};$

***(e)** $e_n = \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n}.$

2.5. Divergente Folgen. Man sagt eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ **divergiert gegen** $+\infty$, falls es zu jedem $T > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n > T$, $\forall n \geq N$. Dann schreiben wir $a_n \rightarrow \infty$. $(a_n)_{n \geq 1}$ **divergiert gegen** $-\infty$ falls $(-a_n) \rightarrow \infty$. Finden Sie Beispiele für reelle Folgen (x_n) und (y_n) , so dass $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow -\infty$ und

(a) $x_n + y_n \rightarrow +\infty;$

(b) $x_n + y_n \rightarrow -\infty;$

(c) $(x_n + y_n)$ konvergiert;

(d) $(x_n + y_n)$ beschränkt ist und divergiert.