Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

3.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- ☐ Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- ☐ Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Jede null Folge ist beschränkt.

(b) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Sei $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

  $$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

  Dann ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
- ☐ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$.

(d) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- ☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$;

☐ kann $(x_n)_n$ unbeschränkt sein;

☐ gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m, n > N$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

***3.2. Grenzwert.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+4}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-19)^n-\pi}{13^n+1}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2024)^n+(-2025)^n}{(-2024)^{n+1}-(-2025)^n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

***3.3. Fibonacci.** Die reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b) Falls es existiert, berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(d) Finden Sie eine Zahl $n \geq 1$ sodass folgende Aussage gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n : \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

3.4. Subsequenzkriterium. Beweisen Sie, dass wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen L konvergiert, jede Teilfolge (b_n) von (a_n) auch gegen L konvergiert.

3.5. Limes superior und Limes inferior I. Sei $x_n = 2^n(1+(-1)^n)+1$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie (mit Beweis):

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

(b) $\limsup_{n\to\infty} x_n$

(c) $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

(d) $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$