Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

4.1. MC Fragen.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(1) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k^2$

- ☐ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ☐ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(2) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$

- ☐ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ☐ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (S_m) der Partialsummen $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergiert.
- ☐ Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe ist, wobei $0 \leq b_n \leq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

***4.2. Limit-Vergleichssatz** Sei (a_n) und (b_n) zwei Folgen, wobei $a_n, b_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es existiert eine reelle Zahl $l > 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $N > 0$, wobei $\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$ für jedes $n > N$, gibt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(c) Das Obenstehende gilt nicht, wenn $a_n/b_n \to 0$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

***4.3. Reihe I.** Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen (d.h. entscheiden Sie in jedem Fall ob die Reihe **absolut konvergent**, **bedingt konvergent**, oder **divergent** ist).

(a) $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$,

(b) $\sum_{k\geq 1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}$,

(c) $\sum_{k\geq 1}\frac{3}{2k+2}$.

4.4. Reihe II. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergent, mit $a_k \geq 0, \forall k \geq 1$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$$

konvergiert.

4.5. Reihe III. Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergent. Zeige, dass

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

für jedes $N \geq 0$ konvergent ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Grenzwerten?

4.6. Komplexe Folgen Sei (a_n) eine komplexe Folge, sodass

$$|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Folgern, dass (a_n) konvergent ist.