Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(c) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(d) Sei (x_n) eine reelle Folge, sodass $x_n \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist absolut konvergent.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ist absolut konvergent, falls $|y_n| \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

5.2. Wurzelkriterium „starker" als Quotientkriterium. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

***5.3. Reihen I.** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (d).

***5.4. Komplexe Reihe** Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergent ist.

(a) Zeigen Sie, dass $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n^2| \leq |x_n|$ für alle $n \geq N_0$ ist.

(b) Folgern, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist, falls $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass, wenn $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nicht absolut konvergent ist, es sein kann, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ divergiert.

5.5. Wurzelkriterium Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl y, sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass die Folge $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergente ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.