Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

6.1. Doppelte Summation, monotone Funktionen, Stetigkeit. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt?

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right)?$$

- ☐ Keine Bedingung ist erforderlich. Diese Gleichung ist immer wahr.
- ☐ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $|a_{m,n}| \leq C$ für alle $m, n \geq 0$.
- ☐ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} \leq C, \quad \forall M, N \geq 0.$$

- ☐ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} |a_{m,n}| \leq C, \quad \forall M, N \geq 0.$$

(b) Sei $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$. Sei außerdem ρ' der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$. Welche Aussage trifft zu?

- ☐ $\rho > \rho'$
- ☐ $\rho < \rho'$
- ☐ $\rho = \rho'$
- ☐ Es liegen nicht genügend Informationen vor, um dies zu entscheiden.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ $\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- ☐ $\exp(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ $\exp : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = 1$

☐ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n = 1.$

***6.2. Konvergenzradius** Untersuchen Sie die absolute Konvergenz und den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{4n!} z^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9i}{n^2} z^{2n}$.

6.3. Vertauschen von Limes und unendlicher Summation. Lesen Sie die Aussage von Satz 2.7.28 im Skript.

(a) Definiere für $j, n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = n, \\ 0, & \text{falls } j \neq n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert, dass aber

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

gilt. Wieso ist Satz 2.7.28 hier nicht anwendbar?

***6.4. Zeige, dass das Cauchy Produkt der beiden *divergenten* Reihen**

$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots$ **und** $-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

absolut konvergiert.