

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

7.1. MC Fragen: Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Stetigkeit von f ?

☐ Für alle $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in D$ gilt:

$$z \in (x - \delta, x + \delta) \implies f(z) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

☐ Für alle $x \in D$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in D$ gilt:

$$|z - x| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

☐ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass für alle $x, z \in D$ gilt:

$$|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

☐ Alle obigen Definition sind falsch.

(b) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

☐ $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

☐ Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monoton wachsend.

☐ Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

(c) Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt $\implies f$ monoton.

☐ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies f$ stetig.

☐ $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ beschränkt.

☐ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ beschränkt.

(d) Welche der folgenden Bedingungen impliziert **nicht**, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist?

☐ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- ☐ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.
- ☐ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

***7.2. Stetigkeit I** Finden Sie die Werten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \leq -1, \\ (a + b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases}$$

definiert ist, stetig in $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

7.3. Zwischenwertsatz Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es $x \in [0, 1]$ gibt, sodass $f(x) = x$.

***7.4. Stetigkeit II.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur in $x = 0$ stetig ist.

7.5. Surjektivität von x^n . Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto x^n$$

surjektiv ist.

Hinweis: Wir können nicht davon ausgehen, dass die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x^n$ (d. h. die n -te Wurzelfunktion) existiert, ohne zu zeigen, dass die Funktion f surjektiv ist.